

DINÂMICA CAÓTICA E NÃO-LINEAR EM SÉRIES FINANCEIRAS: I – FUNDAMENTOS

Antônio Carlos da SILVA FILHO³

Fabiano Guasti LIMA^{**}

Fátima Maria Helena Simões PEREIRA DA SILVA^{***}

- RESUMO: Este é o primeiro de uma série de três artigos, nos quais será realizada uma análise do uso de dinâmica caótica e não-linear no tratamento de séries financeiras. Neste primeiro artigo será feita uma revisão dos fundamentos subjacentes à dinâmica caótica.
- PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica caótica; séries financeiras;

Há uma forte tradição na cultura financeira e econômica de tratar o objeto de seu estudo com ferramentas de análise linear. A suposição implícita é a de que os sistemas sob estudo são, essencialmente, lineares. Ocorre que, nem sempre, a natureza dos sistemas e dos dados com os quais se trabalha é linear, o que implica que as ferramentas de análise linear utilizadas para o estudo deste tipo de sistemas não são as mais adequadas. Faz-se necessário o uso de ferramentas específicas. Algumas delas, provenientes do estudo de sistemas caóticos, constituirão o cerne destes artigos.

Já no final do século XIX, o matemático francês Henri Poincaré notou, ao estudar, em mecânica celeste, o chamado problema reduzido dos três corpos, onde um deles tem uma massa muito menor que a dos outros dois, que a órbita do corpo de massa menor era muito sensível a pequenas variações nas condições

³ Professor da Unifran, da Unaerp e das Faculdades Barão de Mauá.

^{**} Professor da Facef e da Unifran

^{***} Professora da USP-Ribeirão de Preto..

iniciais, percorrendo caminhos completamente diferentes mesmo quando as alterações nas condições iniciais do sistema eram muito, muito pequenas. Mas o trabalho de Poincaré permaneceu praticamente esquecido até que Edward LORENZ (1963), trabalhando com sistemas meteorológicos, redescobriu esta propriedade, à qual chamou de “sensibilidade às condições iniciais”. Esta propriedade é a característica mais saliente dos sistemas que, mais tarde, vieram a ser conhecidos como “caóticos”.

A palavra “caos” só foi utilizada a partir da década de setenta, introduzida pelo matemático americano James Yorke. Sistemas caóticos são sistemas que exibem soluções caóticas, as quais tem algumas características marcantes. A primeira delas é que tais soluções só são possíveis em sistemas não-lineares. Sistemas lineares não exibem, nunca, comportamento caótico. Assim, o uso de ferramentas de análise caótica só deve ser feito, em princípio, em sistemas não-lineares. Esta é a hipótese básica que está subjacente quando se faz a análise de séries temporais financeiras e econômicas com ferramentas provenientes do estudo de dinâmica caótica.

Pode-se definir Caos como um sinal aparentemente aleatório e irregular, gerado por um processo determinista, com as seguintes propriedades adicionais (GRAUWE et al., 1993):

- Exibe sensibilidade às condições iniciais;
- É aperiódico;
- É associado a um atrator estranho;
- Tem um espectro de potências de Fourier contínuo e de banda larga;
- Tem pelo menos um expoente de Liapunov positivo.

O estudo moderno deste tipo de sistema começou com Lorenz na década de sessenta e é relativamente novo, caso se pense na História da Ciência como um todo. O que será feito aqui será a exibição de alguns sistemas que possuem as características técnicas para serem considerados caóticos. Através destes sistemas, serão introduzidos os parâmetros de dinâmica caótica normalmente

usados na análise de séries temporais e que são os seguintes: a Dimensão de Correlação, a Entropia de Kolmogorov-Sinai e os Expoentes de Liapunov.

A definição dada acima de sistemas caóticos diz que os sinais são gerados por um processo determinista, mas aparentam ser aleatórios e irregulares.

Uma dinâmica caótica pode convergir, com o passar do tempo, para uma região num espaço n-dimensional; nesse caso, a região de atração recebe o nome de “atrator”. Alguns atratores correspondem a figuras geométricas conhecidas, como pontos, curvas, toros, etc. Mas alguns apresentam formas geométricas estranhas, cheias de falhas e reentrâncias, sendo, por isto, chamados de “atratores estranhos” (RUELLE E TAKENS, 1971). O termo “caos” é usado para refletir a dinâmica de um sistema, enquanto que o termo “atrator estranho” é usado para refletir a geometria do atrator. Normalmente um sistema caótico apresenta um atrator estranho, mas existem dinâmicas caóticas que apresentam atratores que não são estranhos, bem como dinâmicas não-caóticas que podem apresentar atratores estranhos. A frequência com que um sistema visita vários setores do atrator pode ser revelada por suas dimensões, que podem, assim, evidenciar a complexidade do sistema.

Dimensão, no senso comum, é qualquer quantidade mensurável, como comprimento, altura, largura, etc. No estudo dos Sistemas Dinâmicos, entretanto, usa-se a palavra “dimensão” com pelo menos sete significados diferentes (WILLIAMS, 1997). Segue-se uma ligeira explicação de cada uma:

- Dimensão euclidiana: é o número de coordenadas necessárias para descrever uma figura geométrica. Assim, para descrever uma linha reta é necessário que se meça uma coordenada, o comprimento da linha; logo, a reta tem dimensão euclidiana igual a um. Um cuidado a ser tomado aqui é que, por exemplo, um ponto (de dimensão zero), pode ser localizado numa reta por uma dimensão, numa superfície por duas dimensões ou no espaço por três dimensões.

- Dimensão topológica: é definida como sendo 1 mais a dimensão euclidiana do ente geométrico mais simples que pode subdividir o objeto cuja dimensão topológica se procura. Assim, se for removido qualquer ponto de uma linha reta infinita, esta ficará subdividida em duas menores. Isto quer dizer que um ponto (de dimensão zero) é o ente geométrico mais simples que divide uma linha, o que implica que a dimensão topológica da reta é $1 + 0 = 1$. A dimensão topológica, como a euclidiana, é sempre um número natural.

- Dimensão como número de variáveis ou eixos no espaço de fase padrão: este conceito de dimensão tem pelo menos três classificações, dependendo da definição de “variável”. Qualquer que seja a definição, “variável” é uma quantidade exatamente mensurável. O primeiro caso é o de uma componente ou ingrediente de um sistema: por exemplo, a temperatura da atmosfera usada na previsão do clima. O segundo caso é o do número de objetos ou espécimes dos quais se mede uma característica particular: por exemplo, seja um sistema com dois bebês dos quais se mede o peso semanalmente. Os valores dos pesos são, então, colocados em um gráfico com dois eixos, um para o primeiro bebê e outro para o segundo. Diz-se que o sistema é bidimensional. Se houvesse N bebês ter-se-ia um sistema N -dimensional. O terceiro caso refere-se ao número de objetos (ou espécimes) vezes o número de características mútuas que estão sendo medidas, como, por exemplo, tomar, além dos pesos dos dois bebês, suas alturas. Os dois bebês requerem, então, 4 dimensões para a sua descrição. Tal conceito pode levar a um número colossal de dimensões.

- Dimensão de semelhança: seja um segmento de reta de comprimento L que pode ser subdividido em N partes de comprimento c . Diz-se que cada parte teve uma redução de escala de $1/N$. Ampliando qualquer um desses segmentos por um fator de L/c reproduz-se o segmento original como um todo. A dimensão de semelhança nunca é maior que a dimensão topológica do espaço que ocupa (chamado espaço de imersão) e pode assumir valores reais. Fornece uma idéia preliminar da

complexidade do sistema.

- Dimensão de capacidade e dimensão de Hausdorff: se, para um conjunto de pontos em d dimensões, o número $N(\epsilon)$ de d -esferas de raio ϵ que são necessárias para cobrir o conjunto aumenta de acordo com a equação $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$, para $\epsilon \rightarrow 0$, então D é chamada de dimensão de Hausdorff do conjunto de pontos (SCHUSTER, 1984). A dimensão de Hausdorff é obtida através do processo de minimização por “caixas” (instrumentos de medida) que podem ser de tamanhos ϵ diferentes, enquanto que o cálculo da dimensão de capacidade envolve o mesmo processo, exceto que o tamanho das “caixas” é o mesmo.

- Dimensão de informação: as dimensões de semelhança, de capacidade e de Hausdorff consideram, apenas, a geometria do atrator (sua forma aparente e tamanho); já a dimensão de informação está diretamente ligada ao conceito de informação e sua medida. Seja um atrator de um dado sistema dinâmico e construamos uma rede que o recubra. Digamos que a rede é formada por células de tamanho característico ϵ . Contemos, então, a quantidade de pontos em cada célula e dividamos esta quantidade pelo número total de pontos da trajetória. Certamente, algumas células estarão vazias, enquanto que outras terão uma boa frequência. Diminuindo o tamanho da célula, temos uma idéia mais precisa da distribuição dos pontos no atrator (imaginemos o caso limite em que ϵ é tão grande que uma única célula contenha todo o atrator: não temos, neste caso, informação alguma sobre sua estrutura). Este conhecimento mais preciso do atrator significa mais informação sobre sua estrutura. Chamando de N_s o número total de estados (células) de tamanho I_ϵ (cuja probabilidade de ocupação é diferente de zero) e de P_i , a probabilidade de ocupação do i -ésimo estado, a quantidade de informação, I_ϵ , pode ser escrita como:

$$I_\epsilon = a + D_I \log_2 \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$$

Sabemos que a informação aumenta à medida que ε diminui, ou, o que é equivalente, à medida que $1/\varepsilon$ aumenta. A experiência indica que, para valores intermediários de ε , I_ε é aproximadamente proporcional a $\log_2(1/\varepsilon)$, ou seja:

$$I_\varepsilon = a + D_I \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

O coeficiente de inclinação desta curva nesta região linear, D_I , num gráfico de I_ε versus $\log_2(1/\varepsilon)$ é a dimensão de informação. Como este valor depende do número de dimensões em que a trajetória está imersa, temos que calcular D_I para várias dimensões de imersão e procurar por algum valor assintótico.

- **Dimensão de correlação:** atualmente, é a medida mais popular de dimensão. Foi proposta por GRASSBERGER e PROCACCIA (1983). É muito parecida com a dimensão de informação, porém, é mais complexa. A dimensão de correlação é procurada em um gráfico do log da integral (ou soma) de correlação versus o log de ε , enquanto que a dimensão de informação é procurada em um gráfico da informação versus $\log(1/\varepsilon)$. Mas, tanto a integral de correlação como a informação são expressas em termos de probabilidades. A diferença fundamental entre ambas está na maneira de se calcular essas probabilidades: para a dimensão de informação, constrói-se uma rede que englobe o atrator e calcula-se, basicamente, a probabilidade de ocupação de cada célula; já para a dimensão de correlação, constrói-se uma célula centrada em cada ponto da trajetória e calcula-se a probabilidade de ocupação desta célula. Para calcular a dimensão de correlação a partir de dados experimentais representando valores de alguma variável aleatória no tempo, TAKENS (1981) demonstrou que é possível

reconstruir a dinâmica do sistema, a partir de uma única coordenada, preservando certas propriedades do mesmo. O algoritmo baseia-se na construção de vetores ξ_i ; m -dimensionais a partir da série temporal $\{x_i\}$, onde $x_i = x(t_i)$; $i = 1, 2, \dots, N$; m é chamada dimensão de imersão e N é o número total de pontos. O teorema de TAKENS (1981), garante uma representação num espaço reconstruído usando $x(t_i)$ como primeira coordenada, $x(t_{i+p})$ como segunda coordenada, e $x(t_{i+(m-p)})$ como última coordenada, onde p é o passo da reconstrução da série, também chamado de “tempo de retardo”. Para a escolha adequada de m , a reconstrução deve ser feita para valores crescentes e sucessivos ($m = 2, 3, \dots$). Demonstra-se que um atrator de dimensão topológica D_0 deve ser imerso num espaço de dimensão m maior, ou igual, a $2D_0+1$; caso contrário, o atrator aparecerá dobrado sobre si mesmo como numa projeção e pontos inicialmente distantes, tornam-se próximos provocando uma distorção na estatística da medida invariante associada ao atrator reconstruído. Como não sabemos, a priori, qual a dimensão topológica do atrator associado à série de dados experimentais que estamos investigando, uma razoável dose de experimentação e bom senso torna-se necessária ao interpretarmos os resultados obtidos, segundo FERRARA e DO PRADO (1994). Para efetuarmos o cálculo da dimensão de correlação (D_c) pensemos na probabilidade de termos dois pontos do atrator num círculo de raio ε , por exemplo. Isso implica a probabilidade da distância entre esses dois pontos ser menor que ε . A medida dessa probabilidade, chamada “integral (ou soma) de correlação”, representada pela letra C , é função de ε e pode ser expressa pela equação a seguir:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \text{n}^\circ \text{ de pares } i, j, \text{ tais que } |x_i^p - x_j^p| < \varepsilon \right\}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Theta[\varepsilon - |x_i^p - x_j^p|]$$

onde: $\Theta(x)$ é a função degrau de Heaviside definida por:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Essencialmente $C(\varepsilon)$ é uma medida de probabilidade que cresce exponencialmente. Então, numa escala log-log, o gráfico de $C(\varepsilon)$ versus ε mostra uma região linear onde:

$$\log(C(\varepsilon)) \approx D_c \cdot \log(\varepsilon)$$

é satisfeita e a dimensão de correlação é dada por:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

Um parâmetro importante na reconstrução do atrator é o passo (p). O estimador de p tem que ser tal que $x(t_i)$ e $x(t_{i+p})$ sejam parcialmente não-correlacionados e independentes (para não utilizarmos um estimador viciado, do ponto de vista estatístico). Faz-se necessário, então, o estudo da função de autocorrelação definida por:

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})$$

e

$$C(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})$$

Um ótimo estimador de p para a reconstrução do atrator é τ , de forma que:

$$C(\tau) = \frac{1}{2} C(0)$$

que indica, aproximadamente, o tempo de decorrelação da série. (TSONIS, 1992).

Para se falar em Entropia de Kolmogorov-Sinai deve-se primeiro falar em probabilidade. Probabilidade pode ser definida como o limite da frequência relativa de um experimento aleatório, quando o número de vezes que o experimento é realizado, sob as mesmas condições, tende ao infinito. A teoria de caos usa

probabilidade, não só por si mesma, mas também para quantificar “informação”. A teoria da informação é o tratamento formal, padrão, de informação definível matematicamente. Ela vem à tona na teoria do caos de várias formas importantes. Informação está estritamente e inversamente relacionada com probabilidade. Por essa razão, a estimação de probabilidade baseia-se no inverso de um estimador numérico de informação. Se as probabilidades de resultados possíveis de um experimento são iguais, informação (I) é o $\log(1/p)$. Usualmente, as probabilidades de vários resultados não são iguais, portanto, temos que ponderar a informação de cada estado. Assim, informação é a soma dos valores da informação ponderada pelos estados, ou seja:

$$I = \sum_{i=1}^{N_s} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

onde N_s é o número de estados e $\log(1/P_i)$ é a informação de cada estado.

Vejamos, agora, o conceito de entropia. Baseado, em parte, no princípio fundamental do físico francês Sadi Carnot, de 1820, o físico alemão Rudolf Clausius (1822-1888) introduziu o conceito de entropia em seu trabalho publicado em 1865 sobre engenharia de produção de calor (termodinâmica) (WILLIAMS, 1997). A ideia geral é que é impossível conduzir toda energia de um sistema na realização de um trabalho, pois parte dessa energia não é utilizável (ela escapa, por exemplo). Entropia é, nesse sentido original em termodinâmica, uma medida, ou cálculo, da energia inacessível. Entropia alta significa que grande parte da energia de um sistema não pode ser usada para trabalho. Entropia baixa significa que somente uma pequena proporção de energia do sistema é impossível de se obter, isto é, a maioria é utilizável. O físico

austriaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) delineou uma medida estatística ou probabilista de entropia (H):

$$H = -K \sum_{i=1}^{N_s} P_i \log(P_i)$$

onde K é a constante de Boltzmann (e depende somente da unidade) e P_i é a probabilidade ordinária de um elemento estar em qualquer um dos N_s estados do espaço de fases (WILLIAMS, 1997).

Alguns pesquisadores (incluindo o próprio Boltzmann), em torno de 1870, começaram a ver entropia como uma medida de informação. Em meados do século XX, Nyquist, Hartley, Shannon e outros especialistas em comunicação elétrica e Wiener em cibernética, fizeram o maior progresso em favor de uma medida numérica de informação (WILLIAMS, 1997).

Claude E. Shannon (1916), engenheiro, escreveu um famoso trabalho, em 1940 (resumido em 1949 por Shannon e Weaver), com abordagens matemáticas, que deu origem à teoria da informação. Em particular, por considerar probabilidades, Shannon chegou à equação:

$$I_{II} = - \sum_{i=1}^{N_s} P_i \log(P_i)$$

A fórmula, evidentemente, é a mesma de Boltzmann estabelecida para o cálculo da entropia usada em mecânica estatística com $K = 1$.

O mais nobre poder da fórmula de Shannon é sua ampla aplicabilidade: enquanto a fórmula de Boltzmann era limitada à mecânica estatística, a de Shannon aplica-se a qualquer campo e para vários tipos de probabilidade.

A entropia de Kolmogorov-Sinai (K-S), que mede “quão caótico é um sistema dinâmico”, também pode ser definida de forma análoga. Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) propôs aplicar, em 1958, a entropia de Shannon para sistemas dinâmicos. Mais tarde, em 1959, Sinai deu uma definição refinada e uma prova para a teoria de Kolmogorov (WILLIAMS, 1997). Esse tipo de entropia passou a chamar-se, então, entropia de Kolmogorov-Sinai (K-S). Ela tem três importantes propriedades:

Primeiramente, K-S requer probabilidades seqüenciais. Entropia trata da informação, ou incerteza, associada a uma seqüência de medidas, ou observações, no tempo. Assim, o cálculo da entropia é feito por intervalos consecutivos de tempos regulares.

Tem-se, renomeando I_w por H_w , que representa “entropia ponderada”:

$$H_w = - \sum_{i=1}^{N_s} P_i \log(P_i)$$

Considere-se uma trajetória no tempo, de um sistema dinâmico m -dimensional: $\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$. Divida-se o espaço de fases em caixas de hiper-volumes ε^m . Observe-se o sistema a intervalos de tempos regulares τ . Defina-se a probabilidade conjunta $p(i_1, i_2, \dots, i_m)$ como sendo a probabilidade de observar-se o sistema na caixa i_1 em $t = 0$, i_2 em $t = \tau$... e i_m em $t = (m-1) \cdot \tau$. A entropia no sistema, então, será calculada pela equação:

$$H_{\Delta t} = - \sum_{i_1 \dots i_m} p(i_1, \dots, i_m) \ln p(i_1, \dots, i_m)$$

Segundo, a entropia K-S representa uma taxa. Uma taxa (realmente, uma taxa média) é a razão entre a variação de uma certa quantidade e o tempo de sua aplicação. Uma vez que qualquer entropia calculada dividida pelo tempo associado fornece uma entropia média, então uma entropia média por unidade de tempo será dada dividindo-se a equação anterior por $(m-1) \cdot \tau$. Assim,

$$mpo = - \frac{1}{(m-1) \cdot \tau} \sum_{i_1 \dots i_m} p(i_1, \dots, i_m) \ln p(i_1, \dots, i_m)$$

Terceiro, a entropia K-S é um valor limite.

Finalmente, baseando-se nas três propriedades acima, podemos escrever uma expressão para a entropia de Kolmogorov-Sinai:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(m-1) \cdot \tau} \sum_{i_1 \dots i_m} p(i_1, \dots, i_m) \ln p(i_1, \dots, i_m)$$

A estimativa da entropia K-S é um parâmetro importante no estudo de sistemas dinâmicos. Uma estimativa positiva (e não nula) e finita é condição suficiente para ocorrência de caos determinista.

As primeiras tentativas para essa estimação baseavam-se na definição de K-S e, além da difícil implementação, apresentavam resultados, muitas vezes, insatisfatórios.

O procedimento de GRASSBERGER & PROCACCIA (1983), permite estimar a entropia K-S a partir das integrais de correlação $C(\varepsilon)$ computadas a partir da reconstrução de TAKENS (1981).

A entropia K-S corresponde à taxa média de ganho ou perda de informação de um sistema. Em particular, a entropia K-S pode ser calculada a partir da perda (ou ganho) de informação sobre o sistema entre os instantes $m\tau$ e $(m+1)\tau$. Ou seja,

$$\tau H_{KS} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \frac{C_m(\varepsilon)}{C_{m+1}(\varepsilon)}$$

onde τ é o passo da reconstrução.

À medida que m cresce, o valor médio: $1/\tau \ln C_m(\varepsilon)/C_{m+1}(\varepsilon)$ converge para H_{KS} . Uma possibilidade é representar, em um gráfico cartesiano, esse valor médio em função de m para diferentes valores de ε e observar o comportamento assintótico para m grande e ε pequeno.

Já os expoentes de Liapunov (EL) representam a taxa “média” de convergência ou divergência de duas trajetórias vizinhas num espaço de fases, e medem, portanto, quão imprevisível ou previsível é o sistema. Diz-se taxa “média” pois, em geral, para um tempo finito, o valor dos expoentes de Liapunov depende da condição inicial x_0 . São considerados como uma das estatísticas mais importantes na descrição da evolução da trajetória de um sistema dinâmico.

Um EL pode assumir valores negativos, nulos ou positivos. Valores negativos significam que as trajetórias se aproximam no tempo. Positivos resultam de trajetórias divergentes e aparecem, somente, no domínio caótico. Assim, um EL é um dos maiores indicadores de caos e, uma vez que medem a taxa média com que dois pontos, inicialmente próximos, se distanciam no tempo, quantificam a sensibilidade do sistema às condições iniciais. EL nulo significa que as trajetórias não divergem e nem convergem, logo indica que

existe uma direção ao longo da qual o deslocamento se processa.

FERRARA e DO PRADO (1990), afirmam que sinais periódicos têm um EL nulo; não existe convergência nem divergência de trajetórias, porque todas as trajetórias se sobrepoem. Um sinal aleatório também terá EL nulo porque por um longo período de tempo, trajetórias adjacentes convergirão e divergirão igualmente. Por outro lado, os processos estocásticos apresentam valores positivos para os EL porque esses processos não são exatamente previsíveis. Processos deterministas regulares são exatamente previsíveis e, conseqüentemente, têm expoentes de Liapunov nulos.

O EL é, freqüentemente, representado pela letra grega λ . Para um mapa unidimensional pode ser prontamente calculado.

Se é permitido a um sistema desenvolver-se a partir de dois estados iniciais, levemente diferentes, x e $x + \varepsilon$, então após n iterações sua divergência pode ser caracterizada, aproximadamente, como:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon \cdot e^{\lambda n}$$

onde o expoente λ (EL) fornece a taxa média de divergência. A diferença entre dois estados inicialmente próximos, após o n -ésimo passo, é dada pela expressão:

$$\ln \left[\frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right] \cong n\lambda$$

onde $f^n(x)$ é a n-ésima iteração da função $f(x)$ do sistema dinâmico definido por: $x_{n+1} = f(x_n)$ no caso unidimensional, por exemplo. Para valores pequenos de ϵ essa expressão se torna:

$$\lambda \cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right|$$

Finalmente, usa-se a regra da cadeia para a derivada da nésima iteração e toma-se o limite quando n tende ao infinito para obter:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

λ converge para um valor médio, à medida que n cresce. Na prática, a partir de um certo número de iterações n , λ oscila em torno de um valor médio. Portanto, o EL fornece a taxa média por iteração do distanciamento da trajetória.

Estes são alguns dos conhecimentos básicos relacionados à dinâmica caótica. No próximo artigo será exibido o seu uso na análise de séries temporais.

SILVA FILHO, A. C. da; LIMA, F. G.; SILVA, F. M. H. S. P. da I: Chaotic and no-linear dynamics in financial series: I - Foundations. *Facef Pesquisa*. Franca, v.5, n.1, p.47-63, 2002.

- **ABSTRACT:** This is the first paper of a series of three, in which it will be carried an analysis of chaotic dynamics, as well as non-linear dynamics, in

financial time series. A review of the basic concepts of chaotic dynamics is introduced first.

- **KEYWORDS:** Chaotic dynamics; financial time series analysis.

Referências Bibliográficas

DE GRAUWE, P., DEWACHTER, H. e EMBRECHTS, M. *Exchange Rate Theory*. Oxford, Blackwell Publishers, 1993.

FERRARA, N. F. e DO PRADO, C. P. C. *Caos. Uma Introdução*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1994.

GRASSBERGER, P; PROCACCIA I. Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica* **9D**, 1983.

LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, p. 130-141, 1963.

RUELLE, D. e TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (addendum **21**, p. 21), **23**, p. 343, 1971.

SCHUSTER, H. G. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim, VCH Verlagsgesellschaft, 1989.

TAKENS, F. Detecting Strange Attractors in Turbulence. In: RAND D. A., YOUNG L. S. (ed.) *Dynamical Systems and Turbulence*, (Springer Lecture Notes in Mathematics) v.898, Springer-Verlag, 1981.

TSONIS, A. A. *Chaos: from theory to applications*. New York: Plenum Press, 1992.

WILLIAMS, G. P. *Chaos Theory Tamed*. Taylor e Francis, 1997.