

EXPLORAÇÃO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DINÂMICAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA:

aplicações e implicações na Educação Matemática

Maikon Cintra de Oliveira

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
maikoncintra50@gmail.com

Marcos Adriano Silva Rodrigues

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
marcosadriano2106@gmail.com

Prof^a. Ms. Letícia Faleiros Chaves Rodrigues

Mestre em Matemática Universitária e Docente do Uni-FACEF
leticia@facef.br

RESUMO

A integração de tecnologias no ensino, como o software GeoGebra, surge como alternativa para tornar a aprendizagem da geometria mais dinâmica e acessível, face aos desafios das metodologias tradicionais. Este trabalho acadêmico tem objetivo de investigar a utilização de metodologias de ensino em geometria, comparando uma abordagem tradicional com utilização do software GeoGebra como ferramenta de ensino. Fundamentado em um referencial teórico que enfatiza a importância da visualização e manipulação dinâmica para a compreensão de conceitos matemáticos, o estudo foi realizado com duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental Final, ao longo de três semanas. Durante esse período, os alunos exploraram temas como propriedades das figuras geométricas, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. A metodologia adotada inclui um estudo de caso comparativo entre duas abordagens pedagógicas distintas: a primeira, centrada em instruções teóricas e exercícios práticos tradicionais; a segunda, que utiliza o GeoGebra para proporcionar uma experiência de aprendizagem interativa e envolvente. As aulas foram organizadas em três blocos temáticos, permitindo uma exploração visual e prática dos conceitos geométricos. O GeoGebra é destacado como um recurso que potencializa a interatividade e a visualização, permitindo que os alunos construam e manipulem figuras geométricas, o que facilita a compreensão de propriedades, relações e teoremas. O estudo discute como a adoção de tecnologias educacionais pode transformar o ensino da Matemática, promovendo um aprendizado mais significativo e estimulante. Assim, este trabalho visa contribuir para a reflexão sobre práticas pedagógicas no ensino de geometria, reforçando a necessidade de integrar ferramentas tecnológicas que favoreçam a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades essenciais para o contexto educacional, evidenciados pelos resultados obtidos nesse trabalho, destacando uma diferença de 11% a mais de acertos para os alunos que estiveram na turma que utilizou o software Geogebra.

Palavras-chave: geometria; geogebra; metodologia de ensino; visualização; aprendizagem interativa.

ABSTRACT

The integration of technologies into education, such as the GeoGebra software, emerges as an alternative to make geometry learning more dynamic and accessible, addressing the challenges of traditional methodologies. This academic work aims to investigate the use of teaching methodologies in geometry, comparing a traditional approach with the use of GeoGebra software as a teaching tool. Grounded in a theoretical framework that emphasizes the importance of visualization and dynamic manipulation for understanding mathematical concepts, the study was conducted with two 9th-grade classes from the final years of elementary school over three weeks. During this period, students explored topics such as the properties of geometric figures, the Pythagorean Theorem, and Thales' Theorem. The methodology adopted includes a comparative case study between two distinct pedagogical approaches: the first focused on theoretical instructions and traditional practical exercises, and the second using GeoGebra to provide an interactive and engaging learning experience. The lessons were organized into three thematic blocks, allowing visual and practical exploration of geometric concepts. GeoGebra is highlighted as a resource that enhances interactivity and visualization, enabling students to construct and manipulate geometric figures, which facilitates understanding of properties, relationships, and theorems. The study discusses how the adoption of educational technologies can transform mathematics teaching, promoting more meaningful and stimulating learning. Thus, this work aims to contribute to the reflection on pedagogical practices in teaching geometry, emphasizing the need to integrate technological tools that foster knowledge construction and the development of essential skills in the educational context. The results obtained in this study highlight an 11% higher accuracy rate for students in the group that used the GeoGebra software.

Keywords: geometry; geogebra; teaching methodology; visualization; interactive learning;

1 INTRODUÇÃO

O ensino da geometria no contexto educacional moderno se encontra diante de inúmeras possibilidades, destacando a necessidade de utilizar novos métodos para ensiná-lo. O ensino tradicional, comumente utilizado, apresenta desafios significativos para os professores, especialmente no que se refere à motivação dos alunos e à aplicação prática dos conceitos geométricos.

Historicamente, a geometria tem sido ensinada por métodos convencionais que, frequentemente, carecem de dinamismo e interatividade – elementos essenciais para o engajamento dos estudantes na era digital. Com o avanço da tecnologia, surgem novas ferramentas que oferecem métodos inovadores para a exploração de conceitos matemáticos. Entre essas ferramentas, destaca-se o software **GeoGebra**.

O GeoGebra é uma plataforma de Matemática dinâmica que combina geometria, álgebra e cálculo em um único ambiente, permitindo uma abordagem mais visual e exploratória dos conceitos matemáticos. Sua aplicação no ensino de geometria tem ganhado destaque devido à sua capacidade de facilitar a visualização e a compreensão de conceitos complexos. Com o GeoGebra, os alunos podem manipular figuras geométricas, observar propriedades emergentes em tempo real e desenvolver uma compreensão mais profunda e intuitiva das relações geométricas.

A relevância deste estudo fundamenta-se na necessidade de inovar as práticas pedagógicas no ensino de Matemática, buscando métodos que os ajude a construir o conhecimento, mas também despertem o interesse e a curiosidade dos alunos. O uso de tecnologias educacionais, como o GeoGebra, oferece uma oportunidade única para transformar a maneira como a geometria é abordada nas escolas. Ao investigar as potencialidades desse software, este trabalho contribui para o desenvolvimento de práticas educativas mais eficazes e envolventes, que podem resultar em melhorias significativas no desempenho dos alunos.

Além disso, a integração de ferramentas tecnológicas no ensino reflete uma tendência global de digitalização da educação, preparando os alunos para um futuro no qual a fluência digital será cada vez mais essencial. Um exemplo disso é o estado de São Paulo, que apresenta o maior número de plataformas educacionais

integradas ao currículo. Assim, este estudo aborda não apenas uma necessidade imediata do contexto educacional atual, mas também se alinha às demandas futuras da educação.

Em suma, a exploração das construções geométricas dinâmicas com o GeoGebra tem o potencial de facilitar o ensino da geometria, tornando-o mais interativo, compreensível e relevante para os estudantes. Este trabalho busca, portanto, contribuir para essa transformação, oferecendo insights e estratégias que possam ser adotadas por educadores e instituições de ensino.

Desta forma, o trabalho está dividido em cinco capítulos, organizados para explorar gradativamente a teoria e a prática do uso do GeoGebra no ensino de geometria. O capítulo 1 apresenta a contextualização do tema, os objetivos geral e específicos e a justificativa no capítulo 2, são discutidos os desafios no ensino tradicional, com destaque para os obstáculos pedagógicos, cognitivos e tecnológicos enfrentados pelos professores ao ensinar geometria de maneira convencional. Este capítulo também explora como a falta de motivação e engajamento dos alunos pode ser agravada pela abordagem tradicional.

O capítulo 3 é dedicado ao GeoGebra, e apresenta suas funcionalidades básicas e avançadas, assim como exemplos práticos de construções geométricas dinâmicas. Inclui ainda uma análise comparativa entre o uso do software e os métodos tradicionais, destacando as vantagens e limitações do GeoGebra na prática pedagógica. No capítulo 4, são abordados os fundamentos da geometria euclidiana plana, com uma revisão dos principais axiomas e postulados de Euclides, conceitos básicos de pontos, linhas, ângulos e as principais figuras geométricas. Esse capítulo estabelece a base teórica sobre a qual o uso do GeoGebra será explorado.

O capítulo 5 aborda aplicação da proposta e a análise dos resultados. Aqui, o trabalho apresenta exemplos práticos do uso do GeoGebra em sala de aula, analisa o impacto da ferramenta no aprendizado e na motivação dos alunos, e discute como os resultados podem influenciar práticas futuras no ensino da geometria. Já o capítulo 6, versa sobre as considerações finais. E, por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

2. DESAFIOS NO ENSINO TRADICIONAL

O ensino da geometria enfrenta desafios que afetam a aprendizagem dos alunos quando apresentados somente utilizando metodologias tradicionais, que ainda é comumente adotada pelos professores. Embora a geometria seja essencial para o currículo de Matemática, sua abordagem tradicional muitas vezes se mostra insuficiente para engajar os alunos e promover uma compreensão profunda dos conceitos geométricos. Os principais desafios envolvem aspectos pedagógicos, cognitivos, tecnológicos, e relacionados à motivação dos alunos e à formação de professores.

2.2 ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Na metodologia tradicional, a geometria é frequentemente abordada de forma expositiva, com o professor explicando o conteúdo e os alunos assumindo uma postura passiva. Essa abordagem, baseada em explicações teóricas seguidas de exercícios, oferece poucas oportunidades para que os alunos explorem os conceitos de forma prática ou interativa. Como Freire (1996) critica, o modelo "bancário" de educação impede o desenvolvimento do pensamento crítico, algo essencial para a compreensão da geometria, que é intrinsecamente visual e espacial.

Para superar essas limitações, é fundamental que a metodologia pedagógica inclua atividades que promovam a participação ativa dos alunos, como projetos baseados em problemas, onde os conceitos geométricos são aplicados a contextos práticos. A introdução de métodos colaborativos, onde os alunos trabalham em grupo para resolver problemas geométricos, também pode favorecer a construção de um aprendizado mais dinâmico e significativo.

Além disso, quando os conceitos geométricos são contextualizados, os alunos podem perceber como a geometria se relaciona com a vida cotidiana e o mundo ao seu redor. Isso pode ser feito através da análise de formas geométricas em arquitetura, arte, design e até na natureza, permitindo que os alunos compreendam a aplicabilidade da geometria e desenvolvam um maior interesse pela disciplina (Ponte, 2002).

2.2 ASPECTOS COGNITIVOS

O estudo da geometria, especialmente da euclidiana, exige que os alunos desenvolvam habilidades como raciocínio espacial, visualização e dedução lógica a partir de axiomas e teoremas. Segundo Piaget (1975), a habilidade de lidar com abstrações geométricas se desenvolve em fases mais avançadas do desenvolvimento cognitivo, sendo necessário um suporte pedagógico que permita uma transição gradual do pensamento concreto para o abstrato.

Para amenizar essas dificuldades, o ensino de geometria poderia incluir atividades práticas que desenvolvem a visualização e a manipulação de figuras geométricas. Por exemplo, o uso de modelos tridimensionais e atividades que envolvam a construção de figuras geométricas com materiais concretos (como blocos ou peças) ajuda os alunos a entender as propriedades dos objetos geométricos de maneira tangível. Isso facilita a compreensão dos conceitos abstratos, transformando a geometria em uma experiência concreta e acessível (Borba; Penteado, 2001).

2.3 ASPECTOS TECNOLÓGICOS

A tecnologia tem o potencial de transformar o ensino da geometria, oferecendo ferramentas que permitem uma exploração visual e interativa das figuras geométricas. No entanto, o ensino tradicional, em muitos contextos, ainda depende de ferramentas como lápis, régua e compasso, enquanto muitos alunos estão habituados a interagir com tecnologias digitais.

Softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, permitem que os alunos explorem figuras geométricas de maneira dinâmica, manipulando os elementos para observar relações e propriedades em tempo real. Essas ferramentas proporcionam uma nova abordagem de ensino, onde o aluno não apenas assiste a demonstrações, mas interage diretamente com o conteúdo, favorecendo a construção de conhecimento. Além disso, o uso de tecnologias pode tornar o aprendizado mais inclusivo, atendendo a diferentes estilos de aprendizagem.

Entretanto, para integrar essas tecnologias, é necessário investir na formação dos professores, fornecendo treinamento em ferramentas digitais e métodos de ensino inovadores. A infraestrutura escolar também deve ser adaptada para

permitir o uso dessas tecnologias, garantindo que todos os alunos tenham acesso às ferramentas educacionais digitais.

2.4 MOTIVAÇÃO E ENGAJAMENTO DOS ALUNOS

A motivação e o engajamento dos alunos no ensino de geometria são desafios que podem estar ligados aos métodos utilizados em sala de aula. Como mencionado anteriormente, o ensino tradicional frequentemente falha em demonstrar a relevância dos conceitos geométricos para a vida cotidiana, o que pode gerar uma desconexão entre o conteúdo ensinado e os interesses dos alunos.

De acordo com Maturana e Varela (1992), a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno consegue estabelecer relações entre o que aprende e suas próprias experiências. Quando a geometria é ensinada de forma puramente abstrata, sem uma aplicação prática ou uma conexão com o mundo real, os alunos tendem a perder o interesse. Além disso, a ênfase excessiva em memorização de fórmulas e procedimentos mecânicos pode fazer com que o aluno se sinta desmotivado e distanciado do processo de aprendizagem.

Um estudo de Boaler (1997) revelou que abordagens mais interativas e exploratórias, em que os alunos têm a oportunidade de investigar problemas geométricos de maneira colaborativa, resultam em maior motivação e engajamento. Portanto, é essencial que o ensino de geometria inclua atividades ativas, permitindo que os alunos explorem, descubram e apliquem conceitos geométricos de forma significativa e prática.

Para promover a motivação, estratégias pedagógicas podem incluir o uso de problemas contextualizados que se conectem com o cotidiano dos alunos, como projetos de construção de figuras geométricas baseados em situações reais ou a análise de padrões geométricos na arte e na arquitetura. Além disso, o uso de ferramentas digitais, como o **GeoGebra**, oferece um ambiente dinâmico para que os alunos interajam com os conceitos de forma prática, o que reforça o engajamento e o interesse pela disciplina.

2.5 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A formação de professores de Matemática é outro aspecto central nos desafios do ensino tradicional de geometria. Muitos professores foram formados em um contexto onde a ênfase estava na transmissão de conhecimento de maneira expositiva, sem a utilização de metodologias ativas ou tecnologias educacionais. Como resultado, esses profissionais podem se sentir despreparados para adotar práticas pedagógicas inovadoras que valorizem o aprendizado dinâmico e interativo da geometria.

Além disso, a introdução de novas tecnologias no ensino de geometria exige que os professores desenvolvam habilidades específicas para a integração desses recursos em sala de aula. Segundo Valente (2005), a formação continuada de professores é essencial para que eles possam incorporar, de forma eficaz, os recursos digitais e as novas metodologias de ensino. No entanto, muitos sistemas educacionais ainda não oferecem o suporte necessário para que os professores possam se atualizar de maneira contínua e acompanhar as inovações no ensino de geometria.

Uma formação adequada em didática da geometria, com ênfase em abordagens visuais e espaciais, é essencial para capacitar os professores a usarem uma variedade de estratégias pedagógicas, como o uso de materiais concretos, atividades experimentais e recursos tecnológicos. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), uma formação sólida em didática da geometria permitiria que os professores aplicassem práticas mais acessíveis e envolventes, adaptadas aos diferentes estilos de aprendizado dos alunos.

E, seria fundamental que a formação de professores inclua o desenvolvimento de habilidades para estimular a curiosidade e o raciocínio crítico dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizagem colaborativo. A utilização de plataformas como o **GeoGebra** pode enriquecer a formação dos professores, permitindo-lhes experimentar atividades interativas que incentivam a exploração geométrica. Por fim, um programa de formação continuada que priorize a inovação e a didática contribuiria para que os professores ofereçam um ensino de geometria mais motivador e acessível.

3. GEOGEBRA

O software GeoGebra tornou-se uma ferramenta essencial na Educação Matemática contemporânea, destacando-se principalmente por seu caráter dinâmico e interativo. Desenvolvido em 2001 pelo matemático e educador Markus Hohenwarter, o GeoGebra surgiu como uma resposta à necessidade de um recurso que combinasse a geometria, a álgebra e o cálculo em um único ambiente. Desde sua criação, o software passou por diversas atualizações e melhorias, expandindo suas funcionalidades e sua aplicação em diferentes contextos educacionais. A proposta do GeoGebra é facilitar a exploração visual de conceitos geométricos e algébricos, proporcionando um ambiente onde alunos e professores podem interagir diretamente com os elementos matemáticos. Para Cattai (2007, p. 4)

[...] o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Criado inicialmente para possibilitar construções geométricas dinâmicas, o GeoGebra evoluiu para uma plataforma poderosa e multifuncional, abrangendo também áreas como álgebra, estatística e cálculo, o que amplia significativamente suas aplicações no ensino da matemática. Essa multidimensionalidade do GeoGebra o torna adequado para diferentes etapas do aprendizado matemático. Desde o ensino fundamental, onde os alunos estão começando a se familiarizar com conceitos básicos, até o nível superior, onde a complexidade das matérias aumenta, o software oferece uma experiência de aprendizagem integrada e prática.

Para professores, o GeoGebra não é apenas uma ferramenta de ensino; é um agente transformador que altera a abordagem tradicional do ensino. Ele promove uma educação mais visual, intuitiva e interativa, favorecendo a motivação dos estudantes e contribuindo para um aprendizado mais profundo. Com a crescente popularização do GeoGebra, surgiram uma comunidade ativa de usuários, que

compartilham recursos, atividades e experiências, enriquecendo ainda mais o potencial educativo do software.

Figura 1 – Exemplo do compartilhamento de recursos pela comunidade do GeoGebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/math/geometry> - nome do site, online

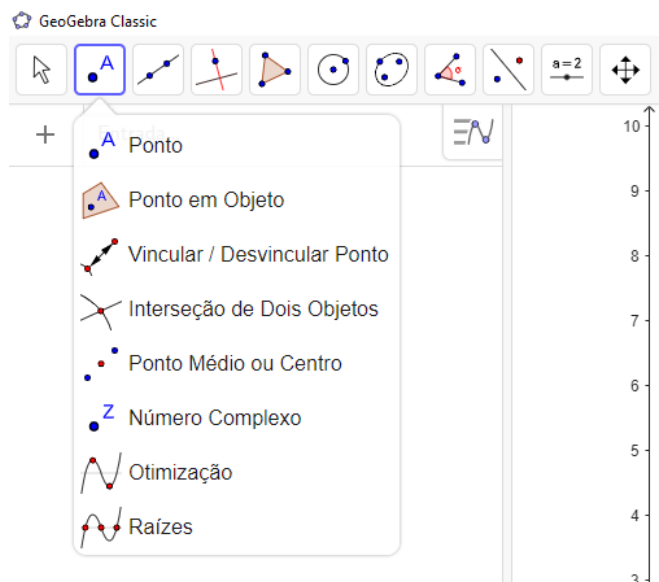
3.1 FUNCIONALIDADES DO GEOGEBRA

O GeoGebra apresenta uma gama vasta de funcionalidades que atendem desde iniciantes até usuários mais avançados, adaptando-se às necessidades dos alunos e professores em diferentes contextos educacionais. Sua interface amigável é um dos pontos que mais favorecem a inclusão de novos usuários, permitindo que mesmo aqueles com pouca experiência em tecnologia consigam utilizá-lo com facilidade.

3.1.1 FUNCIONALIDADES BÁSICAS

As funcionalidades básicas do GeoGebra são fundamentais para a construção de uma base sólida no entendimento matemático. Entre elas, destaca-se a criação de pontos, linhas, polígonos, círculos e outras figuras geométricas. Essas ferramentas permitem que os usuários explorem construções geométricas e realizem manipulações simples de forma intuitiva. Por exemplo, ao mover um ponto de uma figura, os segmentos e ângulos associados se ajustam automaticamente, demonstrando em tempo real as relações geométricas. Essa interação dinâmica proporciona um aprendizado mais ativo, onde os alunos podem investigar e descobrir propriedades matemáticas por meio da experiência direta.

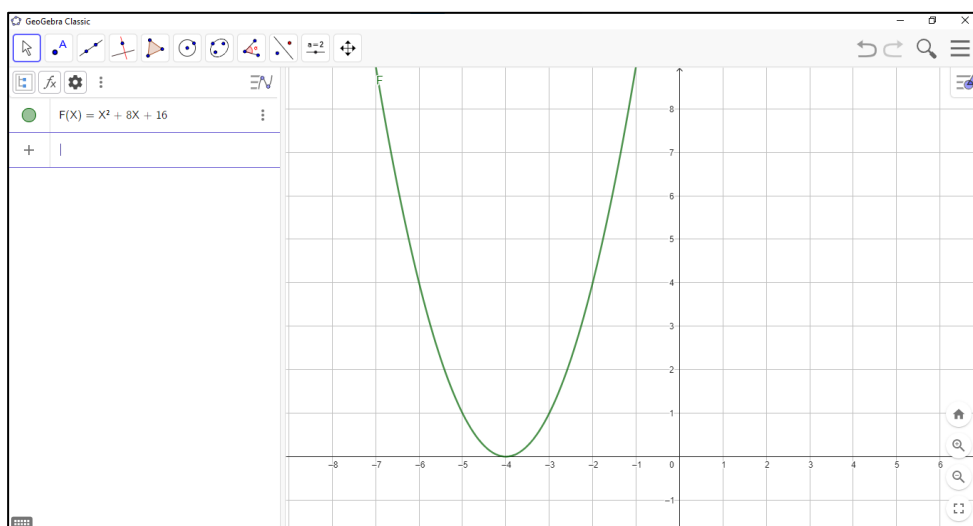
Figura 2 – Barra de ferramentas com a função ponto destacada



Fonte: Elaborado pelos autores

Além disso, o GeoGebra permite a inserção de expressões algébricas que podem ser visualizadas de maneira interativa, estabelecendo uma conexão entre a álgebra e a geometria. Por meio dessa integração, os alunos aprendem a visualizar as representações gráficas de funções e equações, facilitando a compreensão de conceitos como interseções de gráficos, comportamento assintótico e outros aspectos importantes do estudo de funções.

Figura 3 – Função $x^2 + 8x + 16$ mostrada no geogebra

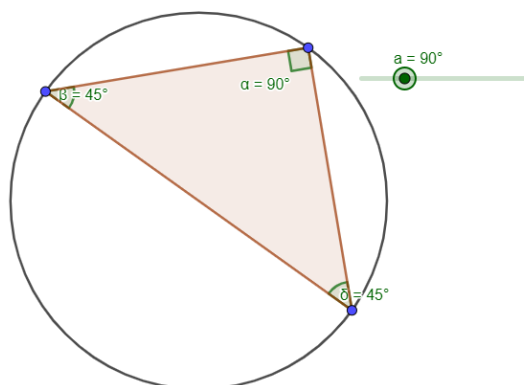


Fonte: Elaborado pelos autores

3.1.2 FUNCIONALIDADES AVANÇADAS

À medida que os alunos progredem em seus estudos, as funcionalidades avançadas do GeoGebra, figura 4, se tornam ferramentas indispensáveis para a exploração de conceitos matemáticos mais complexos. Essas funcionalidades incluem transformações geométricas, como translações, rotações, reflexões e ampliações. Com essas ferramentas, os alunos podem investigar simetrias e propriedades geométricas de uma maneira que não seria possível com métodos tradicionais.

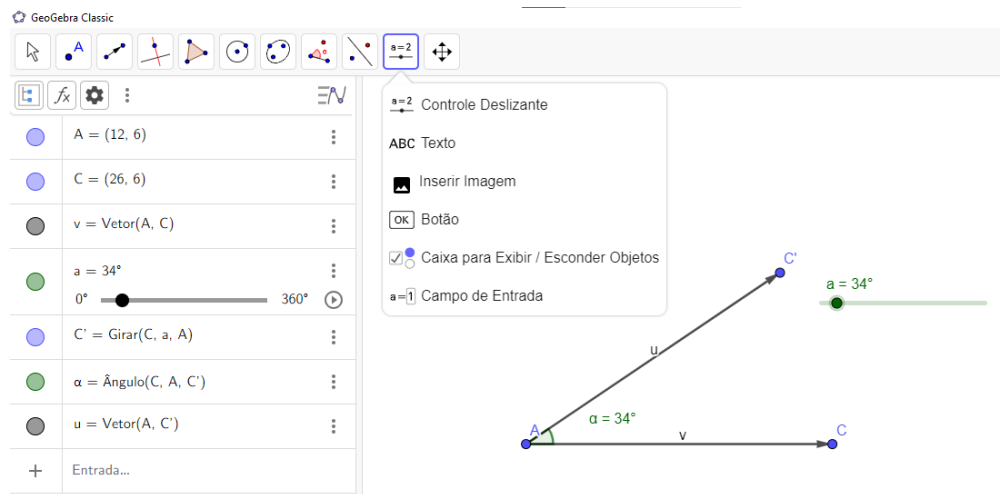
Figura 4 – Triângulo inscrito na circunferência



Fonte: Elaborado pelos autores

Um recurso particularmente interessante é a funcionalidade de controle deslizante, que permite a criação de variáveis dinâmicas. Ao ajustar um controle deslizante, os alunos podem observar como a alteração de um parâmetro impacta na construção geométrica, promovendo uma melhor compreensão de relações funcionais e dependências. Isso é especialmente útil em tópicos como a análise de gráficos de funções, onde os alunos podem manipular coeficientes e observar mudanças em tempo real, ou ver o comportamento de um ângulo em determinado sistema geométrico.

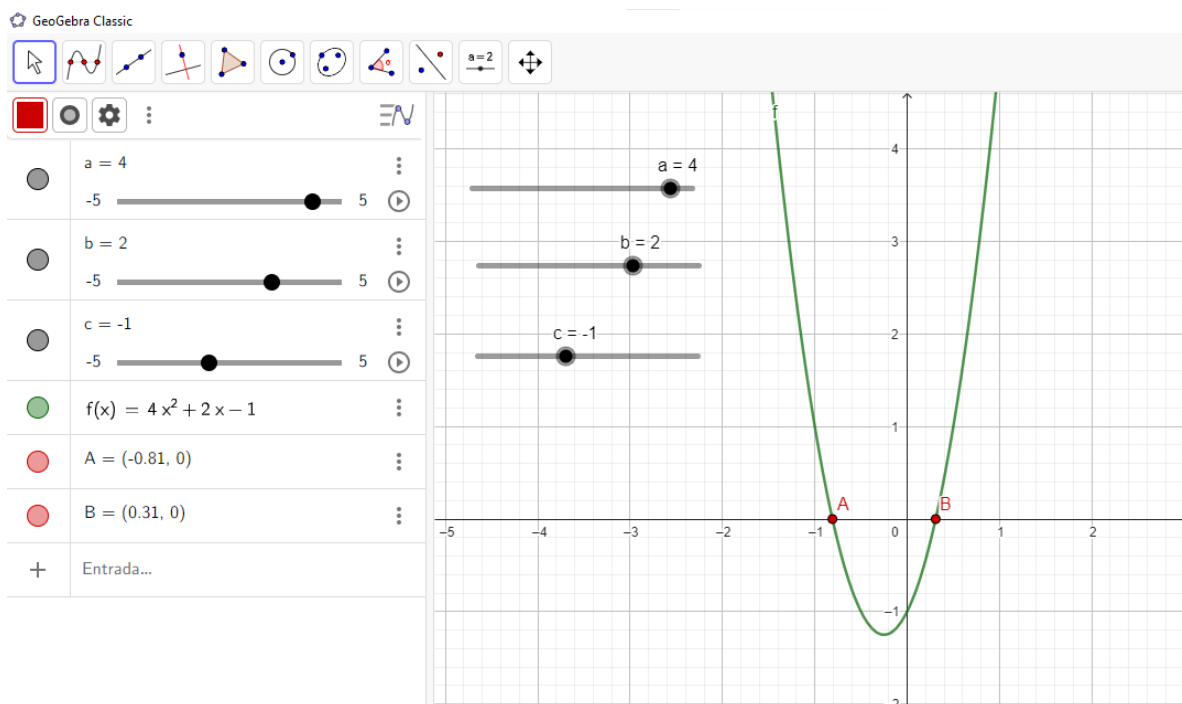
Figura 5 – Vetores formando um ângulo com botão deslizante



Fonte: Elaborado pelos autores

O GeoGebra também oferece animações que podem ser utilizadas para representar a evolução de uma função ao longo do tempo ou a movimentação de uma figura geométrica, tornando o aprendizado mais dinâmico e envolvente. Outro recurso avançado inclui cálculos simbólicos, que possibilitam a resolução de equações, derivadas e integrais, permitindo aos alunos explorar conceitos mais complexos de álgebra e cálculo com facilidade e clareza.

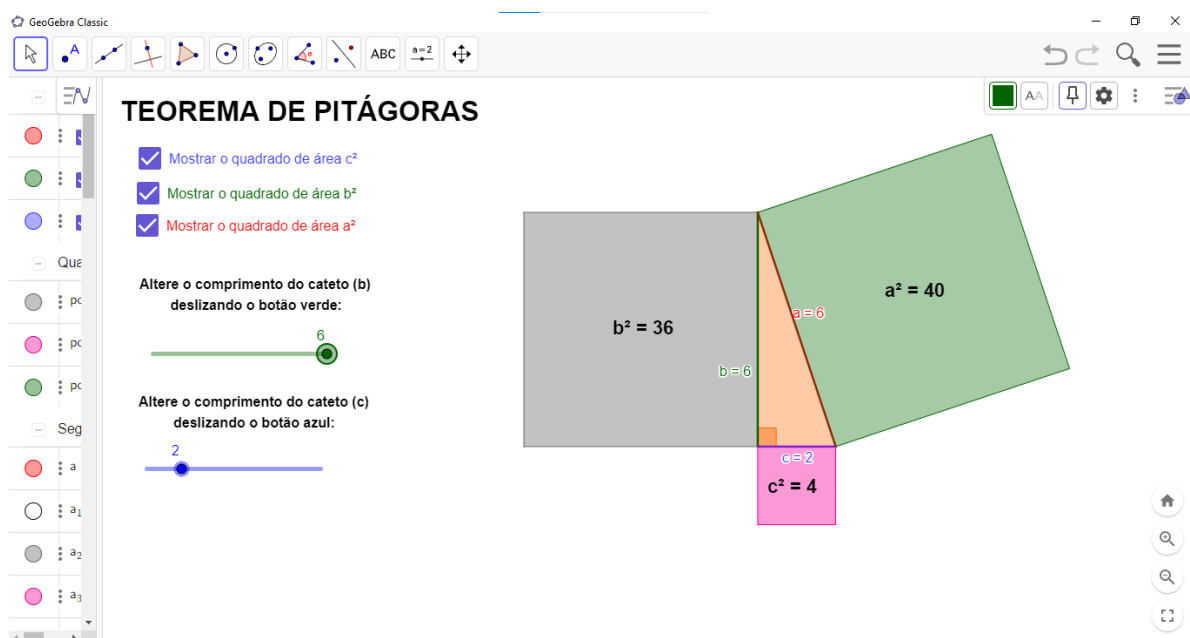
Figura 6 – Função de segundo grau com coeficientes deslizantes



Fonte: Elaborado pelos autores

Para o ensino de geometria, o GeoGebra disponibiliza recursos específicos que facilitam a visualização de propriedades geométricas, como a capacidade de destacar ângulos, lados congruentes e outras características visuais. Isso é particularmente útil na construção de demonstrações visuais de teoremas clássicos, como o Teorema de Pitágoras. O uso de construções dinâmicas que ilustram as relações de áreas entre os lados de um triângulo retângulo, por exemplo, permite que os alunos compreendam de maneira mais intuitiva conceitos que, de outra forma, poderiam parecer abstratos e distantes.

Figura 7 – Modelo de teorema de Pitágoras feito no geogebra



Fonte: Elaborado pelos autores

3.1.3 EXPERIMENTAÇÃO PRÁTICA

O impacto do GeoGebra na Educação Matemática é fonte de estudo de alguns autores, que buscam mencionar o impacto da adaptação e aprendizagem associados ao software utilizados para melhorar a compreensão do conteúdo, melhoria do envolvimento dos estudantes e o uso de software em vez de abordagens tradicionais de ensino. Tecnologias assistivas, tais como o GeoGebra, também podem ser usadas com maior significado e retenção do conhecimento de um ambiente que incentiva os alunos a experimentar, explorar e descobrir a Matemática por conta própria.

Uma das principais melhorias proporcionadas pelo GeoGebra é a visualização de conceitos abstratos. A capacidade de visualizar Matemática complexa em um ambiente dinâmico transforma a maneira como os alunos entendem e interagem com conceitos que, de outra forma, seriam difíceis de apreender. Essa visualização instantânea permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda das relações e propriedades matemáticas, uma vez que podem observar os efeitos de suas ações em tempo real. Por exemplo, ao manipular um gráfico de função, os alunos podem ver diretamente como as mudanças nos coeficientes afetam a forma da curva, facilitando a compreensão de conceitos como máximo, mínimo e continuidade.

Além disso, o GeoGebra tem demonstrado um potencial significativo para aumentar a motivação e o engajamento dos alunos. A interatividade proporcionada pelo software transforma a experiência de aprendizagem em algo mais dinâmico e envolvente. O uso de ferramentas digitais na matemática não apenas melhora o entendimento dos alunos, mas também aumenta sua disposição para aprender, pois eles se tornam participantes ativos no processo educacional. O ambiente interativo do GeoGebra não apenas estimula a curiosidade dos alunos, mas também promove um senso de autonomia e autorregulação no aprendizado, permitindo que os estudantes experimentem e aprendam com seus próprios erros.

O uso do GeoGebra também facilita uma abordagem mais colaborativa e centrada no aluno. As atividades podem ser planejadas para encorajar a discussão em grupo, onde os alunos podem compartilhar suas descobertas e estratégias de resolução de problemas. Esse tipo de colaboração é vital, pois o aprendizado em matemática é frequentemente mais eficaz quando os alunos têm a oportunidade de interagir uns com os outros, discutindo e justificando suas ideias. Assim, o GeoGebra não apenas ajuda a esclarecer conceitos matemáticos, mas também promove habilidades sociais essenciais, preparando os alunos para um ambiente de trabalho colaborativo no futuro.

Comparado aos métodos tradicionais de ensino, o GeoGebra oferece várias vantagens. A visualização imediata dos conceitos matemáticos não apenas facilita a compreensão, mas também permite que os alunos vejam em tempo real como os parâmetros de uma construção influenciam a forma e as propriedades

geométricas. Essa flexibilidade permite que os professores personalizem as atividades de acordo com o nível de conhecimento da turma, oferecendo um ensino mais adaptado e inclusivo. A capacidade de oferecer feedback instantâneo também é uma característica valiosa do software, pois os alunos podem verificar sua compreensão e ajustar suas abordagens de aprendizado conforme necessário.

Entretanto, é importante reconhecer que o uso do GeoGebra apresenta desafios e limitações. Um dos principais obstáculos é a necessidade de formação específica para os professores, que muitas vezes precisam se familiarizar com o software e adaptar suas práticas pedagógicas. A falta de experiência prévia com tecnologia pode dificultar a implementação eficaz do GeoGebra em sala de aula. Além disso, a infraestrutura das escolas pode não estar sempre equipada para permitir o uso pleno do software, com limitações em termos de equipamentos adequados ou de acesso à internet em determinadas regiões.

Outro ponto a ser considerado é que o uso excessivo do software pode levar a uma dependência das construções dinâmicas, potencialmente prejudicando o desenvolvimento das habilidades analíticas necessárias para a resolução de problemas matemáticos de maneira independente. Portanto, é fundamental que o GeoGebra seja integrado ao currículo de forma equilibrada, complementando e não substituindo os métodos tradicionais de ensino. A utilização consciente e planejada do software pode contribuir para uma educação matemática mais conectada e prática, favorecendo o aprendizado e o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos.

Em suma, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta poderosa que tem o potencial de revolucionar o ensino da matemática. Com sua capacidade de tornar a Matemática acessível e envolvente, o software não só melhora a compreensão dos alunos, mas também contribui para um aprendizado mais colaborativo e motivador, preparando-os melhor para os desafios do futuro.

4. HISTÓRIA E FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Segundo Couceiro(2023), os primeiros registros históricos relacionados a utilização de conceitos que hoje conhecemos como geometria datam de 1000 a.C., anteriormente à atribuição da terminologia em vigor. O termo geometria provém da Grécia antiga, onde *geo* significa “Terra” e *metria* vem de “medida”. A união dos termos denota “medida da Terra”.

Os conceitos geométricos tornaram-se necessários na civilização egípcia, que precisava de medir terrenos frequentemente inundados pelas cheias do rio Nilo. Além disso, registros indicam que civilizações anteriores aos egípcios também utilizaram a geometria em áreas como carpintaria, artesanato, arte e construção (Couceiro, 2023).

A maior parte

do desenvolvimento da Geometria resultou dos esforços feitos, através de muitos séculos, para construir-se um corpo de doutrina lógica que correlacionasse os dados geométricos obtidos da observação e medida. Pelo tempo de Euclides (cerca de 300 a.C.) a ciência da Geometria tinha alcançado um estágio bem avançado. Do material acumulado Euclides compilou os seus “Elementos”, um dos mais notáveis livros já escritos. (Barbosa, 1995, p. 21).

Assim, a geometria euclidiana plana, também conhecida como geometria elementar, é uma das disciplinas mais antigas e fundamentais da matemática. Euclides, matemático grego do século III a.C., foi o responsável por sistematizar grande parte do conhecimento geométrico da época em sua obra “Elementos” (Couceiro, 2023), reunindo a sabedoria que antes estava dispersa.

Levi (2008) refere-se à genialidade do modelo euclidiano por demonstrar, através de noções elementares, (ponto, reta e círculo e mais cinco axiomas), o que conhecemos como geometria clássica. Com isso, Euclides desenvolveu passo a passo os principais teoremas da geometria, estabelecendo uma base sólida para o estudo geométrico até os dias atuais.

Neste trecho, serão discutidos os principais conceitos e teoremas da geometria euclidiana plana, que formam a base do estudo geométrico na rede de

ensino.

4.1 AXIOMAS E POSTULADOS DE EUCLIDES

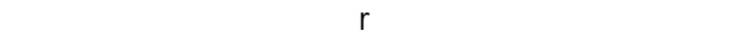
O método axiomático proposto por Euclides consiste em listar os conceitos e postulados iniciais, a partir dos quais podem ser derivados. Essa exposição começa com proposições organizadas em definições, postulados e noções comuns, que devem ser aceitas como verdadeiras sem questionamento. Posteriormente, seu raciocínio se dirige às ideias primitivas que fundamentam a geometria, como pontos, linhas, e os axiomas que dão base aos teoremas e construções geométricas.

Os **postulados** e **axiomas** são essenciais para a lógica de qualquer sistema matemático, especialmente na geometria. Os postulados são condições que devem ser aceitas como verdadeiras, e sua veracidade pode ser verificada por meio de construções geométricas simples, como a criação de um segmento de reta entre dois pontos. Por outro lado, os axiomas são verdades universalmente aceitas e independem de demonstração. Assim, os postulados e axiomas fornecem os alicerces para todo o corpo teórico da geometria matemática.

I. POSTULADO DA RETA

O primeiro postulado de Euclides afirma que uma linha reta pode ser traçada entre quaisquer dois pontos. Isso significa que entre quaisquer dois pontos distintos em um plano, existe sempre uma única reta que os conecta. Essa linha é denominada de reta, e sua representação em notações geométricas é feita por letras minúsculas do alfabeto latino (a, b, c, d, e, ...) como mostrado na figura 8.

Figura 8 – Representação da reta.



Fonte: Elaborado pelos autores

Este postulado é fundamental para a construção de conceitos geométricos básicos, uma vez que as retas formam a estrutura subjacente de muitas figuras geométricas. No contexto do GeoGebra, a representação de retas entre dois pontos é imediata, permitindo que os alunos visualizem e manipulem essas construções de maneira prática e intuitiva.

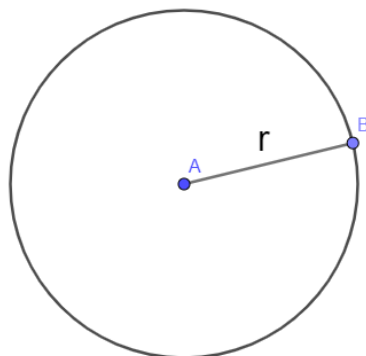
II. POSTULADO DA EXTENSÃO

“A reta é imaginada ilimitada e sem espessura” (Couceiro, 2023, p. 28). Ou seja, uma linha reta pode ser estendida indefinidamente em ambas as direções sem qualquer limite ou fim visível. Este conceito é fundamental para entender a continuidade das linhas em geometria euclidiana.

No ambiente GeoGebra, os alunos podem visualizar e manipular essa ideia de extensão infinita de retas com facilidade. Por meio da ferramenta de construção de retas, os estudantes podem observar e interagir com a reta sendo prolongada indefinidamente, permitindo uma compreensão mais clara da natureza abstrata da geometria, algo que pode ser difícil de demonstrar em um contexto de ensino tradicional.

III. POSTULADO DO CÍRCULO

O terceiro postulado de Euclides estabelece que "Sejam A um ponto do plano e r um número real maior que zero. Chamamos de círculo, com centro A e raio r , o conjunto de todos os pontos B do plano, tais que a distância entre A e B seja igual a r , como representado na figura 9.

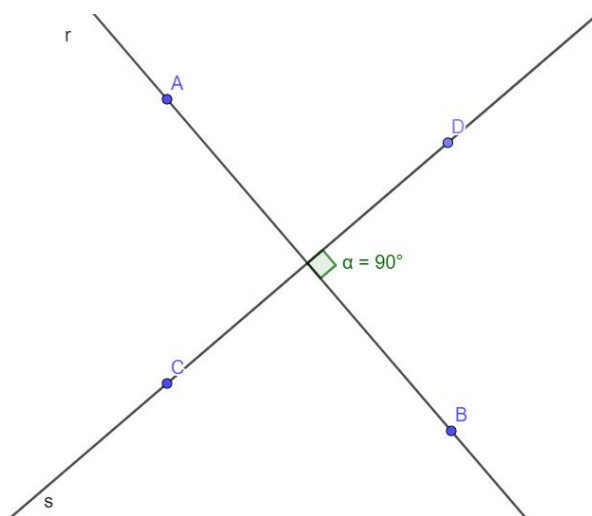
Figura 9 – Representação círculo.**Fonte:** Elaborado pelos autores

Esse postulado é fundamental para a compreender as propriedades das construções que envolvem simetria e rotacionalidade. O círculo é uma das figuras geométricas mais simétricas, e seu estudo é essencial para diversos teoremas e aplicações na geometria.

No GeoGebra, a criação e manipulação de círculos torna-se ainda mais intuitiva. Os alunos podem alterar dinamicamente o valor do raio ou mover o centro do círculo, explorando de forma interativa como essas mudanças afetam sua geometria. Isso facilita uma compreensão mais profunda das relações geométricas envolvidas, além de permitir experimentações práticas com circunferências e suas propriedades.

IV. POSTULADO DO ÂNGULO RETO

O quarto postulado de Euclides estabelece que todos os ângulos retos são congruentes entre si. Isso significa que qualquer ângulo reto, independentemente de sua posição ou do contexto em que aparece, possui a mesma medida de 90 graus. Essa uniformidade é fundamental na geometria euclidiana, pois permite que ângulos retos sejam utilizados como referência constante em construções geométricas, como mostra a figura 10.

Figura 10 – Representação ângulo reto.

Fonte: Elaborado pelos autores

No contexto do ensino, esse postulado é importante para garantir que os alunos compreendam o conceito de congruência angular e o significado de um ângulo reto padrão, que serve de base para a definição de figuras como quadrados e retângulos.

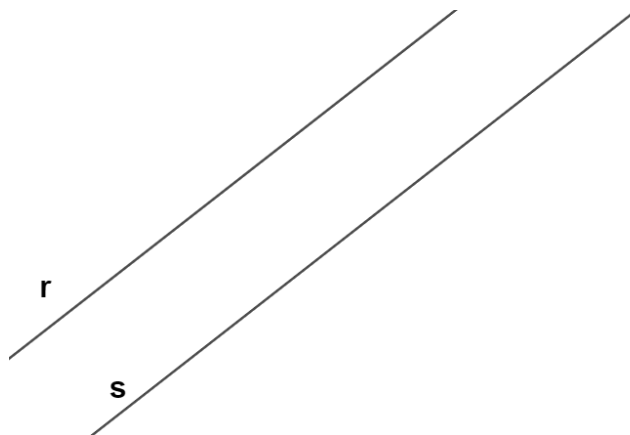
Com o uso do GeoGebra, essa noção de ângulo reto pode ser explorada de forma interativa. Os alunos podem construir retas perpendiculares e verificar que os ângulos formados são sempre iguais a 90 graus, reforçando o conceito de congruência entre ângulos retos. Isso facilita o entendimento visual e prático do postulado e seu uso em outras construções geométricas.

V. POSTULADO DAS PARALELAS (OU POSTULADO DE EUCLIDES)

O quinto postulado de Euclides, conhecido como o *Postulado das Paralelas*, estabelece que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe apenas uma reta paralela que pode ser traçada passando por esse ponto. Este postulado, ilustrado nas figuras 11 e 12, é fundamental na construção da geometria euclidiana, pois define a unicidade da reta paralela em relação a uma linha dada e um ponto externo.

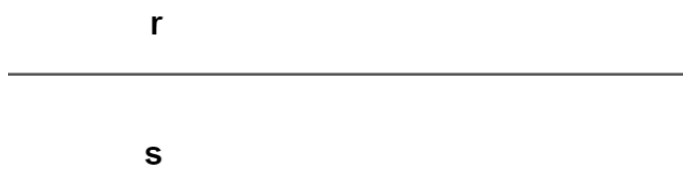
As implicações deste postulado são profundas, sendo uma das bases que sustentam a geometria plana. A ideia de paralelismo é central para diversas construções geométricas e para a definição de figuras que mantêm distâncias constantes entre si.

Figura 11 – Representação de duas retas paralelas



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 12 – Representação de duas retas paralelas.



Fonte: Elaborado pelos autores

No GeoGebra, os alunos podem experimentar a construção de retas paralelas e visualizar como elas se comportam em relação a outras figuras geométricas. Essa interatividade permite uma compreensão mais profunda do conceito de paralelismo, algo que pode ser difícil de transmitir em uma abordagem tradicional.

4.2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção, são abordados os conceitos fundamentais para a compreensão da geometria euclidiana, que formam a base de todo o conhecimento geométrico. Elementos como pontos, linhas e ângulos são apresentados como blocos estruturais da geometria, sendo indispensáveis não apenas para a construção de figuras geométricas, mas também para a aplicação de teoremas e resolução de

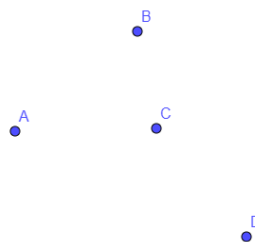
problemas mais complexos.

Esses conceitos básicos são considerados primitivos na geometria euclidiana – isto é, são aceitos sem definição formal, pois servem de ponto de partida para o desenvolvimento de outras definições e proposições. Eles são essenciais para a fundamentação de relações espaciais e são utilizados amplamente em construções geométricas e demonstrações.

4.2.1 PONTOS E LINHAS

Os pontos e as linhas são elementos fundamentais na base da geometria euclidiana. Couceiro (2023, p. 27), o ponto é, “aquilo que não tem partes”. Em termos geométricos, o ponto representa uma entidade abstrata, sem dimensão, extensão ou qualquer propriedade física mensurável; ele se caracteriza unicamente por sua posição no espaço. Como uma coordenada fundamental, o ponto permite a construção de figuras geométricas e a análise de relações espaciais. Sua representação em notações geométricas é feita por letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B, C, D, E, ...), como mostrado na figura 13.

Figura 13 – Representação dos pontos.



Fonte: Elaborado pelos autores

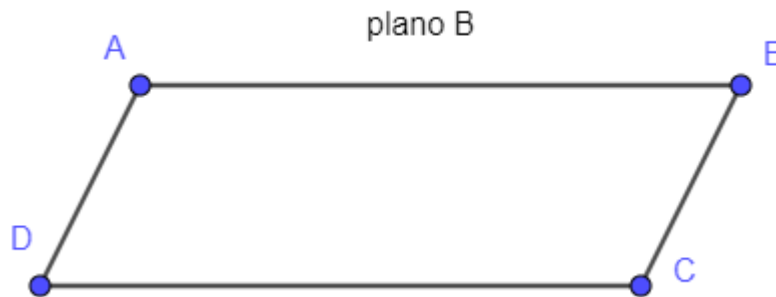
A linha, por sua vez, é um ente abstrato unidimensional que se estende infinitamente em ambas as direções, sem largura ou espessura. Composta por uma sequência contínua de pontos, a linha descreve a trajetória mais curta entre dois pontos no plano. As linhas podem ser classificadas em relação a outras linhas, como linhas paralelas, que nunca se intersectam, e linhas perpendiculares, que se cruzam formando ângulos retos.

4.2.2 PLANO

O plano é definido como um conjunto infinito de pontos, estendendo-se ilimitadamente em todas as direções, sem qualquer limite ou borda visível. Esse conceito é caracterizado pela ausência de espessura, possuindo apenas duas dimensões: comprimento e largura, mas sem profundidade. Em outras palavras, o plano pode ser imaginado como uma superfície infinita e plana, onde quaisquer par de pontos está contido em uma única linha reta.

No contexto da geometria euclidiana, o plano é uma das estruturas mais fundamentais e é representado por letras do alfabeto grego (Σ , Π , Φ , Ω , Δ , ...), conforme ilustrado na figura 14.

Figura 14 – Representação do plano.



Fonte: Elaborado pelos autores

4.2.3 SEGMENTOS DE RETA

Um segmento de reta é uma porção de uma reta limitada por dois pontos distintos, chamados de extremidades. Diferentemente de uma reta que se estende infinitamente em ambas as direções, o segmento de reta possui um comprimento definido, correspondendo à distância entre as extremidades. Este segmento inclui todos os pontos situados entre esses dois pontos, mantendo as propriedades de linearidade da reta. Sua representação é feita por letras maiúsculas, indicando suas extremidades, como ilustrado na figura 15.

Figura 15 – Representação segmento de reta.



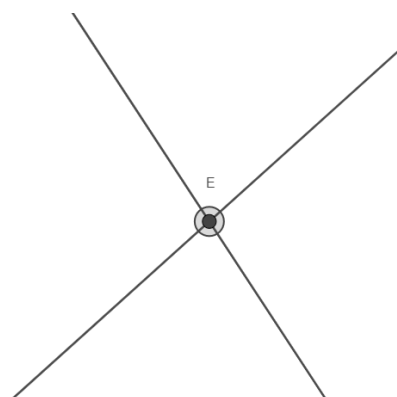
Fonte: Elaborado pelos autores

No GeoGebra, a construção de segmentos de reta permite que os alunos visualizem e manipulem facilmente o conceito de distância entre dois pontos e as propriedades associadas aos segmentos. Essa interação prática é fundamental para o entendimento de figuras geométricas complexas, como polígonos, que dependem de segmentos para suas formações.

4.2.4 ÂNGULOS

Os ângulos são elementos essenciais na geometria, definidos pela interseção de duas retas em um ponto comum, chamado de vértice. Cada ângulo mede a inclinação entre essas duas retas e é expresso em graus ($^{\circ}$). Conforme mostra a figura 16.

Figura 16 – Representação ponto de interseção entre duas retas.

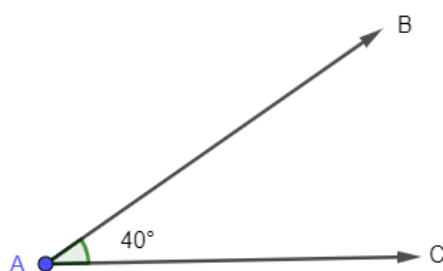


Fonte: Elaborado pelos autores

Os ângulos podem ser classificados em quatro tipos principais: agudo, reto, obtuso e raso, cada um com características e aplicações específicas na construção de figuras geométricas.

- Ângulos agudos: medem menos de 90 graus ($0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$) e são comumente encontrados em triângulos e outras figuras geométricas, contribuindo para a criação de formas variadas e complexas, como ilustrado na figura 17.

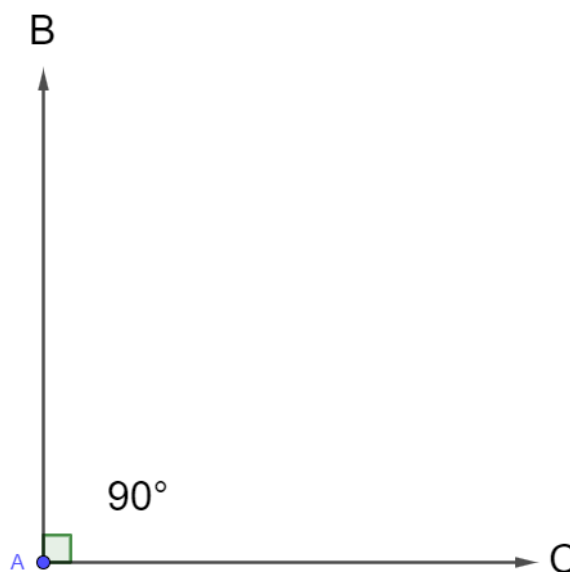
Figura 17 – Representação de um ângulo agudo



Fonte: Elaborado pelos autores

- Ângulos retos: medem exatamente 90 graus ($\hat{A} = 90^\circ$), conforme ilustrado na figura 18. Os ângulos retos são referências em construções geométricas, sendo a base de figuras como quadrado e retângulo.

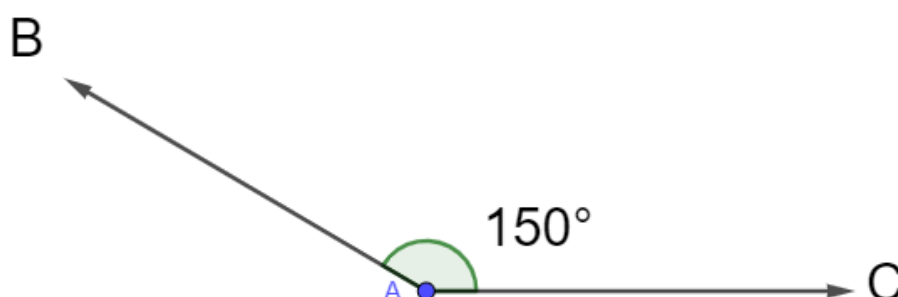
Figura 18 – Representação de um ângulo reto



Fonte: Elaborado pelos autores

- Ângulos obtusos: medem mais de 90 graus e menos de 180 graus ($90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$). Ângulos obtusos são frequentemente encontrados em polígonos e outras figuras onde as linhas formam aberturas amplas, como mostrado na figura 19. Eles contribuem para a diversidade de formas e são essenciais na compreensão de relações angulares em figuras mais complexas.

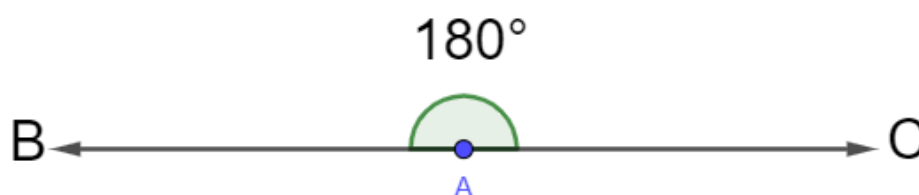
Figura 19 – Representação de um ângulo obtuso



Fonte: Elaborado pelos autores

- Ângulos rasos: medem exatamente 180 graus ($\hat{A} = 180^\circ$) e representam uma linha reta, dividindo o plano em duas semirretas opostas. Esse tipo de ângulo é essencial para entender a linearidade e é ilustrado na figura 20.

Figura 20 – Representação de um ângulo raso.



Fonte: Elaborado pelos autores

Ângulos rasos são relevantes em contextos geométricos em que se busca identificar alinhamentos e colinearidade, além de serem frequentemente utilizados em teoremas e propriedades que envolvem ângulos complementares e suplementares.

No GeoGebra, os alunos podem explorar esses tipos de ângulos de maneira interativa, ajustando as medidas e visualizando como cada tipo de ângulo

afeta a construção de figuras geométricas. Essa abordagem prática facilita o entendimento e a aplicação dos conceitos angulares em problemas geométricos.

4.3 FIGURAS GEOMÉTRICAS

Figuras planas, na geometria euclidiana são formas geométricas bidimensionais, delimitadas por linhas retas ou curvas e contidas em um único plano. Com duas dimensões - comprimento e largura – essas figuras incluem exemplos comuns como: triângulos, quadrados, retângulos, círculos, polígonos regulares (como pentágonos e hexágonos) e trapézios, cada um com propriedades específicas, como número de lados e ângulos.

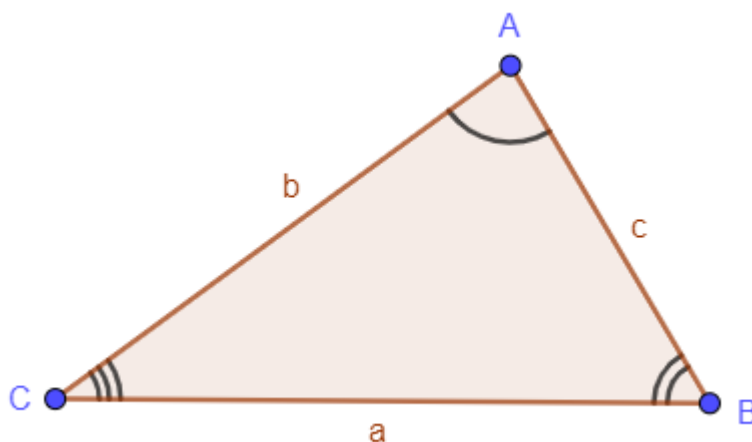
Os polígonos, por exemplo, são figuras formadas exclusivamente por segmentos de reta. A soma dos ângulos internos de um polígono varia conforme a quantidade de lados: em um triângulo, essa soma é sempre 180 graus, enquanto em um quadrilátero essa soma é 360 graus. Essas figuras são fundamentais para o estudo da geometria, pois permitem a análise de formas, áreas e relações espaciais em duas dimensões.

Cada uma dessas figuras desempenha um papel central na geometria euclidiana e será detalhada nas próximas seções. Serão abordadas a classificação dos polígonos, a soma dos ângulos internos, além de fórmulas para o cálculo de áreas e perímetros, bem como suas aplicações práticas no contexto educacional e geométrico.

4.3.1 TRIÂNGULOS

O triângulo é uma figura geométrica básica, formada por três lados e três ângulos internos. Dados três pontos, A, B e C, não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC, como representado na figura 21. Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados e ângulos internos, sendo divididos em diferentes tipos específicos: triângulo equilátero, isósceles, escaleno, retângulos, acutângulo e obtusângulo.

Figura 21 – Representação triângulo ABC.

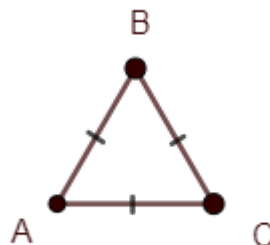


Fonte: Elaborado pelos autores

4.3.1.1 TRIÂNGULO EQUILÁTERO

O triângulo equilátero é uma figura geométrica na qual todos os três lados possuem o mesmo comprimento, ou seja, “se, e somente se, têm os três lados congruentes”. Além disso, seus ângulos internos são todos iguais, medindo 60 graus cada, conforme ilustrado na figura 22. Essa simetria confere ao triângulo equilátero propriedades únicas, tornando-o uma figura balanceada e regular.

Figura 22 – Representação triângulo equilátero.



Fonte: Elaborado pelos autores

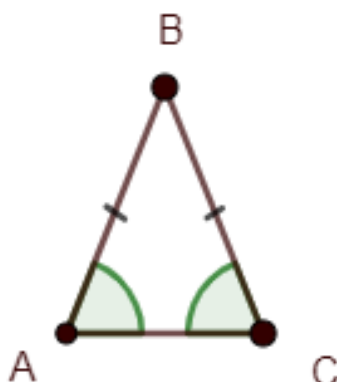
As propriedades principais do triângulo equilátero incluem sua simetria em relação aos lados e ângulos, o que o torna um exemplo fundamental para o estudo de simetria em geometria. Essa regularidade é utilizada em diversas construções

geométricas e permite explorar conceitos como mediatriz, altura e baricentro, que coincidem no triângulo equilátero.

4.3.1.2 TRIÂNGULO ISÓSCELES

O triângulo isósceles é definido como um triângulo que possui dois lados de mesmo comprimento, conhecidos como lados congruentes ou laterais, enquanto o terceiro lado é chamado de base. Essa característica confere ao triângulo isósceles uma simetria que resulta em dois ângulos internos iguais, opostos aos lados congruentes, como ilustrado na figura 23.

Figura 23 – Representação triângulo isósceles.

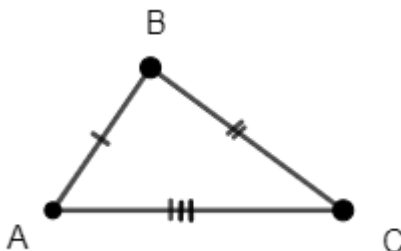


Fonte: Elaborado pelos autores

4.3.1.3 TRIÂNGULO ESCALENO

O triângulo escaleno é um tipo de triângulo em que todos os lados possuem comprimentos diferentes, isto é, “se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes”. Em um triângulo escaleno, nenhum dos ângulos internos é igual, o que confere a essa figura uma forma assimétrica, conforme ilustrado na figura 24. As propriedades dos triângulos escalenos variam de acordo com as medidas específicas de seus lados e ângulos internos, tornando-os únicos entre as classificações de triângulos.

Figura 24 – Representação triângulo escaleno.

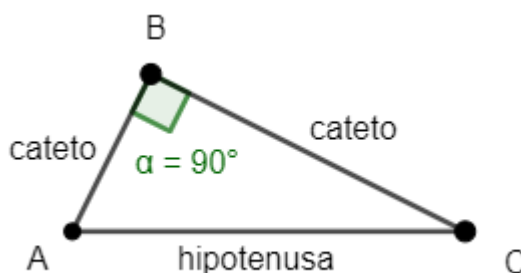


Fonte: Elaborado pelos autores

4.3.1.4 TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo é um tipo de triângulo que possui um ângulo reto (de 90 graus), tornando-o único em relação a outras classificações de triângulos. Essa característica define uma série de propriedades geométricas que são amplamente aplicadas em diversos contextos matemáticos e práticos. Conforme observado por Couceiro (2023), “um triângulo que tem um ângulo reto é denominado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, enquanto os outros dois lados recebem o nome de catetos”, o que constitui a estrutura básica desta figura.

Figura 25 – Representação triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelos autores

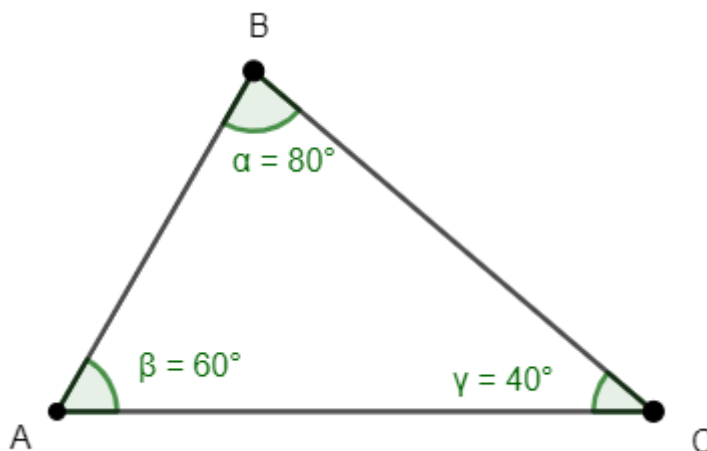
A hipotenusa, sendo o lado mais longo do triângulo retângulo, desempenha um papel central na fórmula do teorema de Pitágoras, o qual estabelece que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Este teorema é expresso pela fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, onde “a” e “b” representam os catetos, e “c”, a hipotenusa. Essa relação é fundamental não apenas para a resolução problemas envolvendo triângulos retângulos, mas também para aplicações em áreas como física, engenharia e arquitetura.

Além disso, o triângulo retângulo é essencial na trigonometria, servindo como base para funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Essas funções relacionam os ângulos do triângulo com a razão entre seus lados, permitindo o cálculo de distâncias e ângulos em uma variedade de contextos práticos.

4.3.1.5 TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

O triângulo acutângulo é uma figura geométrica em que todos os ângulos internos são menores que 90 graus, ou seja, “se, e somente se, têm os três ângulos agudos” (DOLCE; POMPEO, 2013, p.37), conforme ilustrado na figura 26. Essa configuração distingue o triângulo acutângulo dos triângulos retângulo e obtusângulo, que possuem um ângulo reto e um ângulo obtuso, respectivamente.

Figura 26 – Representação triângulo acutângulo.



Fonte: Elaborado pelos autores

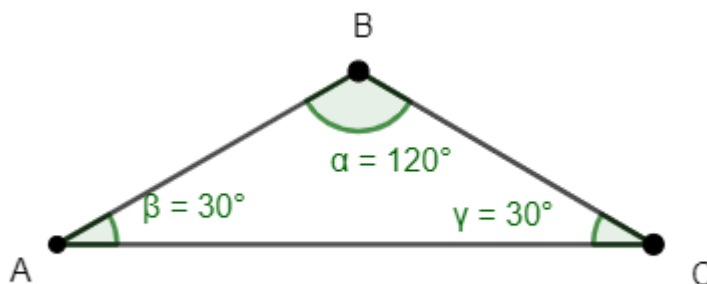
Além de apresentar três ângulos agudos, o triângulo acutângulo mantém as propriedades fundamentais dos triângulos, como a soma dos ângulos internos ser sempre igual a 180 graus.

4.3.1.6 TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

O triângulo obtusângulo é caracterizado pela presença de um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90 graus. Segundo Dolce e Pompeo (2013, p. 37), o triângulo é obtusângulo “se, e somente se, tem um ângulo obtuso”, como

representado na figura 27. Esse ângulo obtuso distingue o triângulo obtusângulo dos triângulos acutângulo e retângulo, que possuem ângulos agudos e retos, respectivamente.

Figura 27 – Representação triângulo obtusângulo.



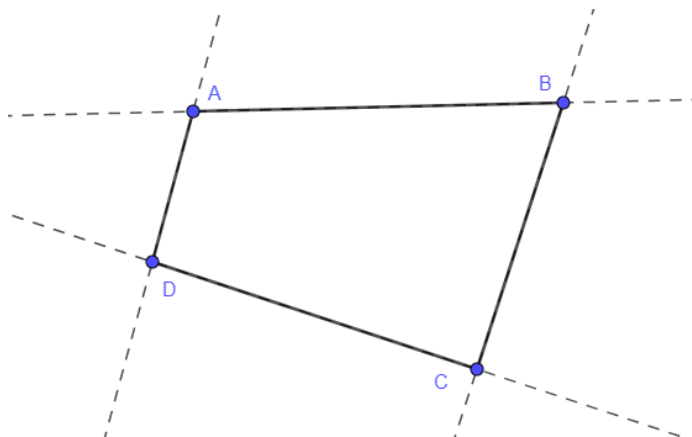
Fonte: Elaborado pelos autores

Nos triângulos obtusângulos, os dois ângulos restantes são agudos, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180 graus. A presença de um ângulo obtuso modifica algumas propriedades geométricas da figura, como o fato de que o centro do círculo circunscrito ao triângulo se posiciona fora da área delimitada por seus lados. Esse tipo de triângulo é utilizado em problemas geométricos que envolvem ângulos maiores que 90 graus e suas relações com os lados da figura.

4.3.2 QUADRILÁTEROS

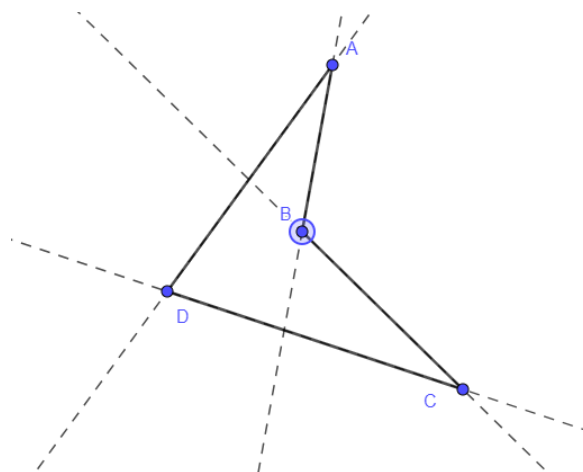
Quadriláteros são figuras geométricas planas formadas por quatro segmentos de reta, que se encontram em pontos distintos A, B, C e D de um mesmo plano. A condição de que três desses pontos não sejam colineares garante a formação de uma figura fechada, como mostrado nas figuras 28 e 29. A ausência de interseções adicionais, exceto nos pontos extremos, é o que permite a definição da forma do quadrilátero.

Figura 28 – Representação quadrilátero.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 29 – Representação quadrilátero.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Quadriláteros podem ser classificados como convexos ou côncavos, de acordo com a disposição de seus ângulos e lados. Um quadrilátero é convexo quando qualquer segmento formado por dois de seus pontos está contido inteiramente em seu interior, como no retângulo e no quadrado (figura 21). Por outro lado, se ao menos um de seus ângulos internos for maior que 180 graus, ele é classificado como côncavo (figura 22), com uma característica de reentrância na forma.

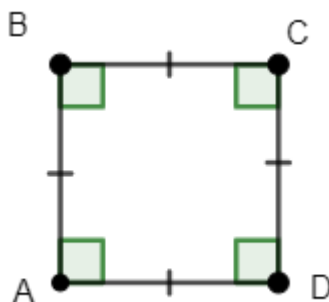
Quando os lados e ângulos internos possuem simetria, o quadrilátero pode ser classificado em tipos específicos, como quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio, detalhados nas seções seguintes. Se todos os lados e ângulos tiverem medidas distintas, o quadrilátero é considerado irregular. Em qualquer quadrilátero, a soma dos ângulos internos é sempre 360 graus, permitindo

análises geométricas como cálculo de áreas e perímetros, além de outras propriedades geométricas.

4.3.2.1 QUADRADO

Um quadrilátero convexo é classificado como um quadrado quando satisfaz simultaneamente duas condições: apresenta quatro ângulos congruentes de 90 graus e possui quatro lados de mesmo comprimento. Essas características fazem do quadrado uma das figuras geométricas mais simétricas, pois ele combina ângulos retos e lados congruentes, formando uma estrutura regular e equilibrada, como ilustrado na figura 30.

Figura 30 – Representação quadrado.

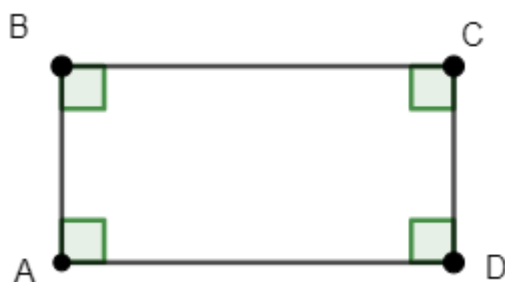


Fonte: Elaborado pelos autores

4.3.2.2 RETÂNGULO

Um quadrilátero convexo é classificado como retângulo quando possui quatro ângulos retos de 90 graus e lados opostos congruentes. Os lados paralelos formam dois pares de segmentos de mesma medida, conferindo ao retângulo uma simetria específica e uma estrutura geométrica estável, como ilustrado na figura 31.

Figura 31 – Representação retângulo.



Fonte: Elaborado pelos autores

Essa combinação de ângulos retos e lados opostos iguais diferencia o retângulo de outros quadriláteros, como os trapézios e os paralelogramos gerais. Embora os lados adjacentes possam ter medidas distintas, a congruência entre os lados paralelos e a uniformidade dos ângulos retos são características definidoras do retângulo.

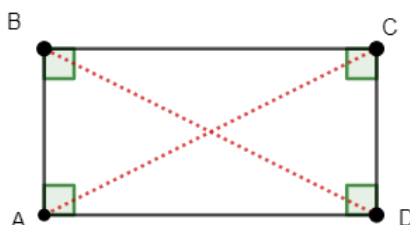
- Propriedades diagonais:

a) Propriedade das Diagonais em um Retângulo.

Segundo Dolce; Pompeo (2013), em todo retângulo, as diagonais são congruentes.

Hipótese: Se ABCD é um retângulo, então $AC \equiv BD$, como mostra a figura 32.

Figura 32 – Representação “Em todo retângulo as diagonais são congruentes”.



Fonte: Elaborado pelos autores

Em uma demonstração, considerando que ABCD é um retângulo, podemos afirmar que ABCD é um paralelogramo. Portanto, os lados opostos são congruentes, ou seja, $BC \equiv AD$. Dado que ABCD é um retângulo, temos ainda que os

ângulos \hat{A} e \hat{B} são ângulos retos (90°). Assim, podemos usar o critério LAL (Lado-Angulo-Lado) para os triângulos ABC e BAD:

$$\triangle ABC \equiv \triangle BAD$$

Dessa forma, pela congruência dos triângulos, podemos concluir que:

$$AC \equiv BD$$

b) Propriedade dos Paralelogramos com Diagonais Congruentes.

Segundo Dolce; Pompeo (2013), todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

Hipótese: Se ABCD é um paralelogramo e $AC \equiv BD$, então ABCD é um retângulo.

Em uma demonstração, considerando que ABCD é um paralelogramo, sabemos que os lados opostos são congruentes ($BC \equiv AD$). Com a condição de que $AC \equiv BD$ e que $BC \equiv AD$, podemos aplicar o critério LLL (Lado-Lado-Lado) nos triângulos ABC e BAD:

$$\triangle ABC \equiv \triangle BAD$$

Neste caso, os ângulos \hat{A} e \hat{B} são colaterais em relação às paralelas AD e BC. Como ABCD é um paralelogramo, os ângulos colaterais são suplementares, ou seja:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

Dado que \hat{A} e \hat{B} são congruentes e também suplementares, podemos concluir que ambos são ângulos retos:

$$\hat{A} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Assim, a congruência dos ângulos \hat{C} e \hat{D} , que são opostos a \hat{A} e \hat{B} respectivamente, também implica que:

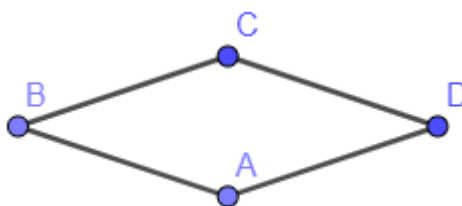
$$C \equiv D \text{ (todos os ângulos são retos)}$$

Portanto, a conclusão é que ABCD é um retângulo. Essa propriedade das diagonais congruentes é uma característica fundamental dos retângulos, diferenciando-os de outros tipos de paralelogramos.

4.3.2.3 LOSANGO

Segundo Dolce; Pompeo (2013), um quadrilátero plano convexo é classificado como um losango se, e somente se, todos os seus quatro lados forem congruentes, ou seja, tiverem o mesmo comprimento. Diferente do quadrado e do retângulo, os ângulos do losango não precisam ser retos; eles podem variar, desde que a congruência dos lados seja mantida, como mostra a figura 33.

Figura 33 – Representação losango.



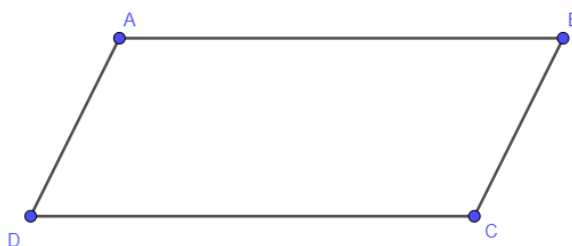
Fonte: Elaborado pelos autores

Essa característica faz do losango uma figura especial, na qual a simetria dos lados é a principal propriedade, enquanto seus ângulos internos podem ser agudos ou obtusos, formando uma estrutura geométrica que, embora similar ao quadrado em termos de lados, difere pela flexibilidade angular.

4.3.2.4 PARALELOGRAMO

Segundo Dolce e Pompeo (2013), um quadrilátero plano convexo é classificado como um paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos forem paralelos. No paralelogramo, além de os lados opostos serem paralelos, eles também possuem o mesmo comprimento, como mostra a figura 34.

Figura 34 – Representação paralelogramo.



Fonte: Elaborado pelos autores

Outra característica importante é que suas diagonais se cruzam no ponto médio, dividindo-se em segmentos iguais. Além disso, os ângulos opostos no paralelogramo são congruentes, mantendo a regularidade angular da figura. O paralelogramo abrange outras figuras geométricas como casos especiais, incluindo o retângulo, o losango e o quadrado, que compartilham a propriedade da paralelidade dos lados, mas possuem características adicionais que os distinguem.

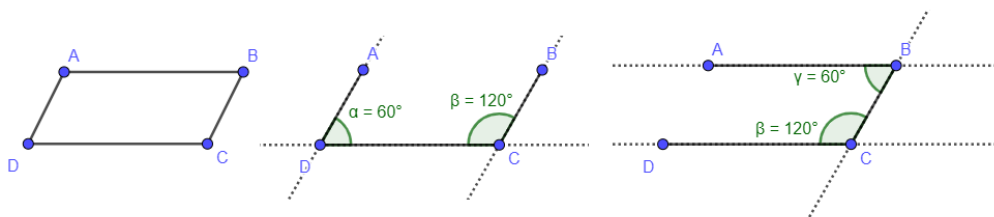
- Ângulos opostos congruentes

Segundo Dolce e Pompeo (2013), em todo paralelogramo, uma de suas propriedades fundamentais é que os ângulos opostos são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida.

Hipótese: ABCD é um paralelogramo, e a tese a ser demonstrada é que $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

Em uma demonstração, sendo ABCD um paralelogramo, temos que $AD \parallel BC$ e $AB \parallel CD$ (propriedade de paralelismo dos lados opostos de um paralelogramo). Sabemos que quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos internos formados entre essas retas são suplementares, como mostra a figura 35.

Figura 35 – “Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.”.



Fonte: Elaborado pelos autores

Portanto, como $AD \parallel BC$ e AB atua como transversal, podemos afirmar que $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. Da mesma forma, como $AB \parallel CD$ e BC é uma transversal, temos que $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Assim, considerando que $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, deduz-se que $\hat{A} \equiv \hat{C}$.

Analogamente, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os ângulos \hat{B} e \hat{D} , já que $AB \parallel CD$, o que nos permite concluir que $\hat{B} \equiv \hat{D}$. Portanto, em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

“Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo”, formalizando essa afirmação.

Hipótese: se $ABCD$ é um quadrilátero convexo, e $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, então a tese a ser demonstrada é que $ABCD$ é um paralelogramo.

Em uma demonstração, considerando que $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, podemos afirmar que:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$$

Sendo $ABCD$ um quadrilátero, sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

Substituindo as congruências, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ$$

Isso implica que:

$$2(\hat{A} + \hat{B}) = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

Consequentemente, deduzimos que os lados AD e BC são paralelos (AD // BC).

De forma análoga, já que $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$, temos que AB e CD também são paralelos (AB // CD). Assim, concluímos que ABCD é um paralelogramo, uma vez que ambos os pares de lados opostos são paralelos.

Consequência: como um caso particular, podemos afirmar que todo retângulo é um paralelogramo, uma vez que, por definição, um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos, implicando a congruência dos ângulos opostos.

4.3.2.5 TRAPÉZIO

Segundo Dolce e Pompeo (2013), um quadrilátero é classificado como trapézio se, e somente se, possuir exatamente um par de lados paralelos, como mostra a figura 36.

Figura 36 – Representação trapézio.



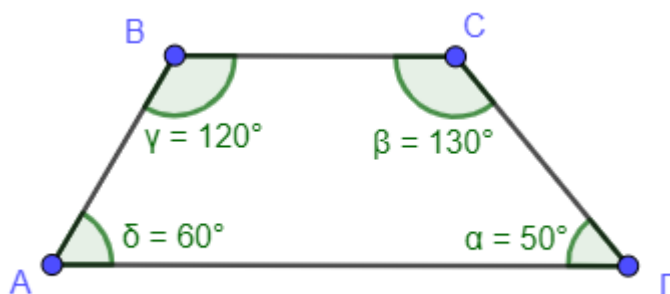
Fonte: Elaborado pelos autores

Esses lados paralelos são denominados bases do trapézio. Dependendo das propriedades dos outros dois lados, que não são paralelos, o trapézio pode ser classificado de diferentes maneiras.

Em seu trabalho Dolce; Pompeo destacam algumas propriedades dos trapézios, em qualquer trapézio ABCD, com bases paralelas AB e CD, é possível estabelecer relações entre os ângulos adjacentes aos lados não paralelos. Considerando a notação cíclica dos vértices, os ângulos formados em A, B, C e D possuem propriedades específicas. Uma dessas propriedades é que a soma dos ângulos adjacentes formados por uma base e seus lados não paralelos sempre resulta em 180° , ou seja, são suplementares.

Mais especificamente Dolce e Pompeo dizem que, como $AB \parallel CD$ e AD é uma transversal, podemos concluir que os ângulos \hat{A} e \hat{B} são suplementares, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. Da mesma forma, devido ao paralelismo entre AB e CD, com BC atuando como transversal, os ângulos \hat{B} e \hat{C} também são suplementares, resultando em $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Portanto, em qualquer trapézio, a soma dos ângulos adjacentes em torno das bases paralelas será sempre 180° , ilustrado na figura 37.

Figura 37 – Representação trapézio qualquer.

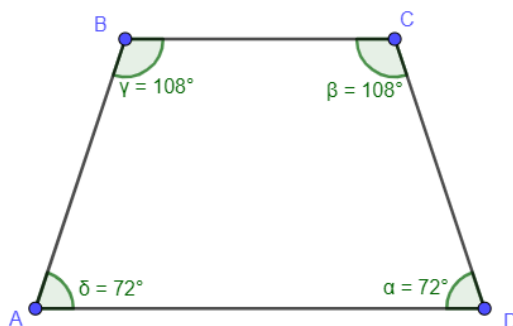


Fonte: Elaborado pelos autores

Trapézio isósceles

Quando esses lados são congruentes, ou seja, possuem o mesmo comprimento, o trapézio é chamado de isósceles, Dolce e Pompeo (2013), como ilustrado na figura 38.

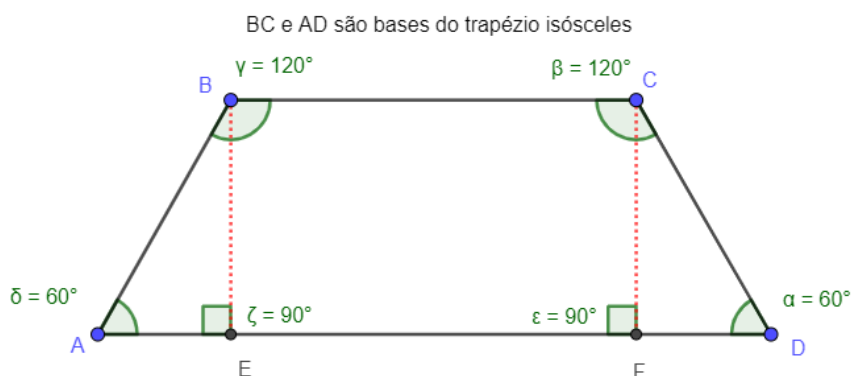
Figura 38 – Representação trapézio isósceles.



Fonte: Elaborado pelos autores

De acordo com Dolce e Pompeo, em um trapézio isósceles, os ângulos formados em cada base são congruentes, ou seja, os ângulos adjacentes em cada lado das bases são iguais. A hipótese dessa afirmação é que AB e CD são as bases do trapézio isósceles, e a tese a ser demonstrada é que $\hat{C} = \hat{D}$ e $\hat{A} = \hat{B}$, como ilustra a figura 39.

Figura 39 – Representação “os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes”.



Fonte: Elaborado pelos autores

- Demonstração:

1º) Traçamos perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, encontrando os pontos A' e B' na base maior CD. Sabemos que $AA' \equiv BB'$ por serem distâncias entre retas paralelas;

2º) Agora, os triângulos retângulos $AA'D$ e $BB'C$ são congruentes, utilizando o critério de congruência de triângulos retângulos (cateto e hipotenusa).

Como $AA' \equiv BB'$ (cateto) e $AD \equiv BC$ (hipotenusa), concluímos que $\hat{C} \equiv \hat{D}$;

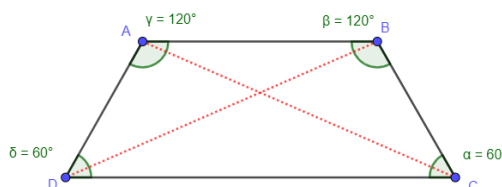
3º) Além disso, como \hat{A} e \hat{B} são suplementares de \hat{D} e \hat{C} , respectivamente, segue-se que $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Observação: a congruência dos triângulos $AA'D$ e $BB'C$ implica também que as projeções ortogonais dos lados não paralelos do trapézio isósceles, sobre a base maior, são congruentes. Isso significa que $A'D \equiv B'C$, garantindo simetria adicional na figura geométrica.

No trapézio isósceles, uma importante propriedade geométrica é que suas diagonais são congruentes, Dolce; Pompeo (2013). Isso significa que, além dos lados não paralelos serem congruentes, as diagonais também possuem o mesmo comprimento.

Hipótese: $ABCD$ é um trapézio com bases AB e CD , e $AD \equiv BC$ (lados não paralelos congruentes). A tese a ser demonstrada é que as diagonais $AC \equiv BD$, como mostra a figura 40.

Figura 40 – Representação “as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes”.



Fonte: Elaborado pelos autores

-Demonstração:

Para provar a congruência das diagonais, consideremos os triângulos ADC e BCD . Como os lados $AD \equiv BC$, os ângulos $\hat{D} \equiv \hat{C}$, e $DC \equiv CD$ (por serem o mesmo segmento), podemos aplicar o critério de congruência LAL (lado, ângulo, lado). Isso nos leva a concluir que os triângulos $ADC \equiv BCD$, o que implica que $AC \equiv BD$, comprovando que as diagonais do trapézio isósceles são congruentes.

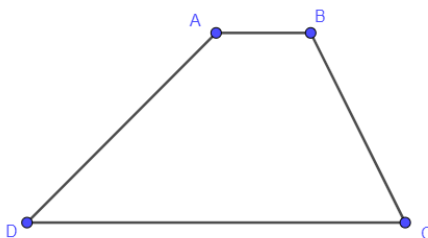
Nota: a partir dessa congruência, podemos também concluir que os ângulos $\hat{ACD} \equiv \hat{BCD}$, mostrando uma simetria adicional entre as diagonais. Além disso, isso implica que os triângulos PCD e PAB (onde P é o ponto de interseção das

diagonais) são isósceles, com bases CD e AB, respectivamente, reforçando a simetria estrutural do trapézio isósceles.

- Trapézio escaleno

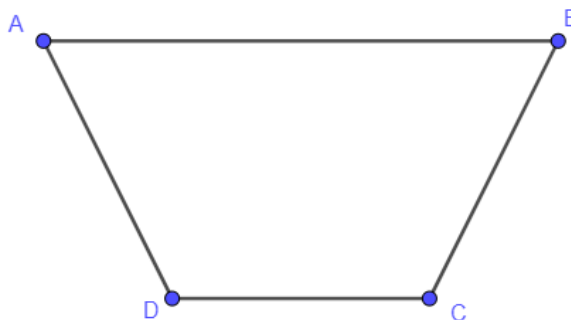
Caso contrário, quando os lados não paralelos têm comprimentos diferentes, a figura é denominada trapézio escaleno, Dolce e Pompeo (2013), representado pelas figuras 41 e 42.

Figura 41 – Representação trapézio escaleno.



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 42 – Representação trapézio escaleno.

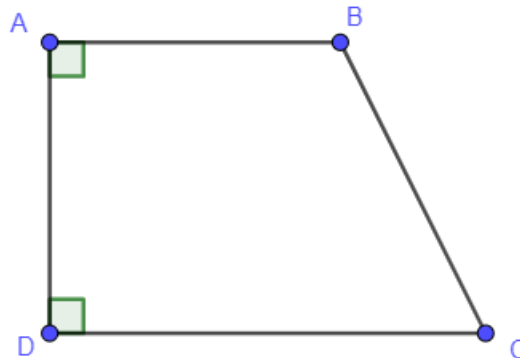


Fonte: Elaborado pelos autores

- Trapézio retângulo

Se o trapézio apresentar dois ângulos retos, ele é classificado como trapézio retângulo (ou birretângulo), Dolce e Pompeo (2013), como mostra a figura 43.

Figura 43 – Representação trapézio escaleno.

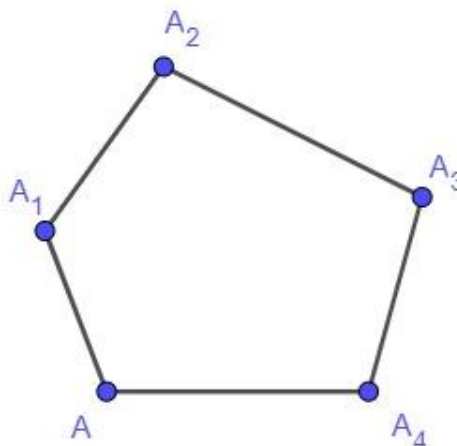


Fonte: Elaborado pelos autores

4.3.3 POLÍGONOS

Definisse polígono como uma sequência de pontos em um plano, onde cada ponto é distinto e, para um polígono com $n \geq 3$, não existem três pontos consecutivos que sejam colineares. Essa definição implica que a configuração dos pontos deve formar uma linha fechada, resultando em uma figura que é a união de segmentos de reta conectando os pontos A_1, A_2, \dots, A_n . Assim, um polígono pode ser representado como $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ ou, de forma mais simples, como $A_1, A_2 \dots A_n, A_1$, evidenciando sua natureza cíclica e a importância da não colinearidade dos pontos consecutivos (Dolce e Pompeo, 2013), como mostra a figura 44.

Figura 44 – Representação polígono.



Fonte: Elaborado pelos autores

Derivada do grego, a palavra “polígono” combina “poli” (muitos) e “gono” (ângulos), indicando uma figura com múltiplos ângulos e lados. Cada lado de um polígono é um segmento de reta, e a figura é fechada, pois seus lados formam um contorno completo, sem interrupções. Os polígonos se dividem em duas categorias principais:

- **Polígonos Regulares:** são aqueles cujos lados e ângulos são congruentes. Esses polígonos possuem propriedades geométricas bem definidas e simétricas, como o quadrado e o hexágono regular.
- **Polígonos Irregulares:** apresentam lados e ângulos de medidas diferentes, resultando em formas menos simétricas e mais variadas.

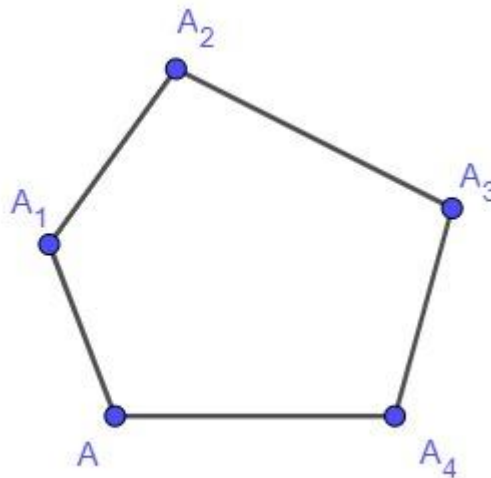
Além dessas classificações, os polígonos são nomeados conforme o número de lados, como o pentágono (cinco lados), hexágono (seis lados), heptágono (sete lados), entre outros. Cada tipo possui características únicas e é amplamente estudado por suas propriedades geométricas.

Um quadrilátero convexo é classificado como um quadrado quando satisfaz simultaneamente duas condições: apresenta quatro ângulos congruentes de 90 graus e possui quatro lados de mesmo comprimento. Essas características fazem do quadrado uma das figuras geométricas mais simétricas, pois ele combina ângulos retos e lados congruentes, formando uma estrutura regular e equilibrada, como ilustrado na figura 23.

Cada polígono é nomeado de acordo com seu número de lados. A seguir, detalhamos alguns dos polígonos mais comuns, com suas propriedades:

- **Pentágono:** o pentágono é definido como um polígono com cinco lados, como mostra a figura 45. A soma de seus ângulos internos é de 540 graus, o que contribui para sua estrutura geométrica específica. Quando regular, todos os lados e ângulos de um pentágono são congruentes, proporcionando simetria. Essa forma regular encontra-se em associações simbólicas, como na estrela de cinco pontas, refletindo equilíbrio e simetria visual.

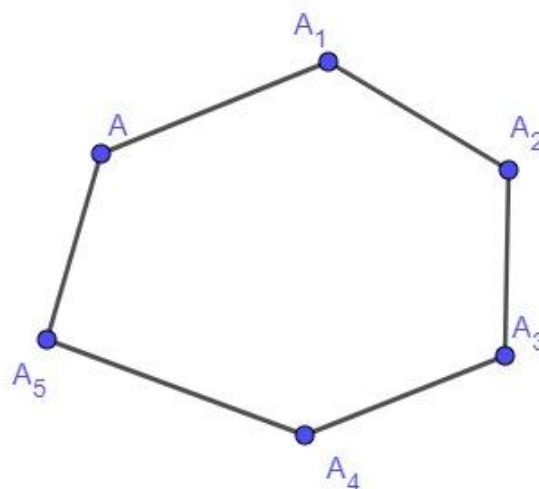
Figura 45 – Representação pentágono.



Fonte: Elaborado pelos autores

- **Hexágono:** o hexágono, composto por seis lados, como mostra a figura 46, apresenta uma soma de ângulos internos de 720 graus. Quando regular, cada ângulo interno mede 120 graus, o que permite uma organização simétrica. A estrutura hexagonal é comumente encontrada em padrões da natureza, como nas colmeias de abelhas, onde a configuração regular otimiza o espaço e a estabilidade.

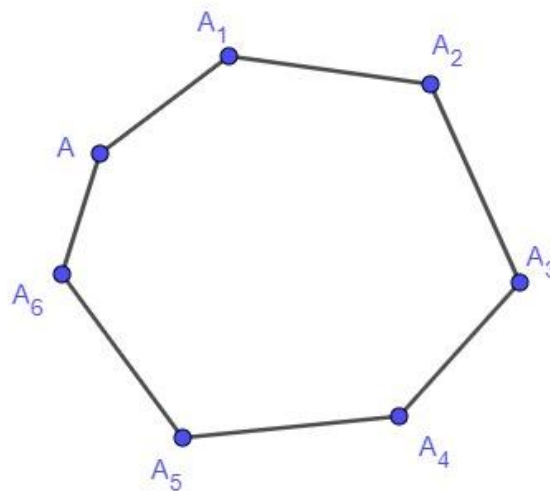
Figura 46 – Representação hexágono.



Fonte: Elaborado pelos autores.

- **Heptágono:** o heptágono é um polígono de sete lados, como mostra a figura 47, com ângulos internos que, somados, resultam em 900 graus. Embora menos recorrente em construções práticas, o heptágono representa um importante estágio de análise para o estudo de polígonos com maior número de lados, fornecendo uma transição de formas regulares para figuras de maior complexidade geométrica.

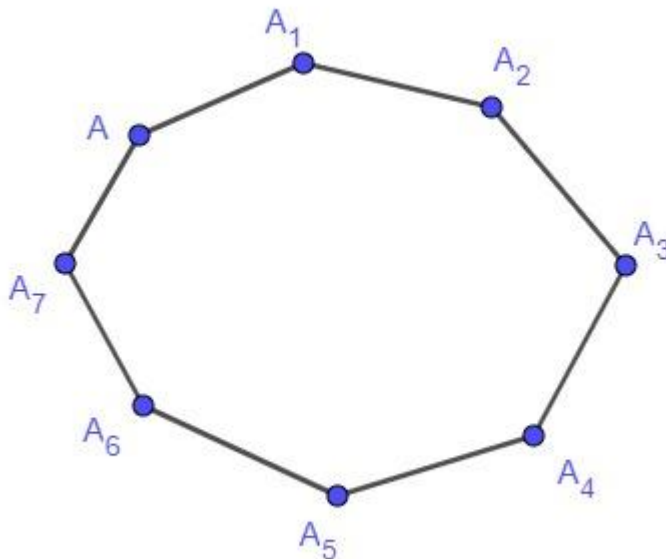
Figura 47 – Representação heptágono.



Fonte: Elaborado pelos autores

- **Octógono:** o octógono é um polígono com oito lados, como mostra a figura 48, a soma dos ângulos internos igual a 1080 graus. No caso de um octógono regular, todos os lados e ângulos são congruentes, característica que contribui para sua utilização prática em sinalizações, como a placa de "pare". A simetria e clareza visual tornam essa forma apropriada para comunicações visuais e funcionais.

Figura 48 – Representação octógono.



Fonte: Elaborado pelos autores

No **GeoGebra**, os alunos podem criar e manipular esses polígonos, ajustando os lados e ângulos para observar como as propriedades de simetria e congruência variam. Essa prática interativa permite que os estudantes explorem visualmente as características de cada tipo de polígono, reforçando a compreensão de seus atributos geométricos.

4.3.4 CÍRCULOS

O círculo é uma figura geométrica única, composta por todos os pontos que estão a uma distância fixa, chamada de raio, de um ponto central. Esse ponto é denominado centro do círculo. Essa definição faz do círculo uma figura altamente simétrica, essencial na geometria e em diversas aplicações práticas.

Elementos do Círculo:

- **Centro:** o ponto central de onde todos os pontos do círculo são equidistantes.
- **Raio (r):** a distância do centro a qualquer ponto do círculo. O raio é um dos elementos fundamentais, pois define o tamanho do círculo.

- **Diâmetro (d):** uma linha reta que passa pelo centro e liga dois pontos opostos do círculo. O diâmetro é sempre o dobro do raio, ou seja, $d=2\cdot r$.
- **Circunferência:** o comprimento da linha que delimita o círculo. A circunferência é calculada pela fórmula $C=2\cdot\pi\cdot r$, onde π (pi) é uma constante aproximadamente igual a 3,14159.
- **Área (A):** a região interna do círculo, delimitada pela circunferência. A área é calculada pela fórmula $A=\pi\cdot r^2$.

Propriedades do Círculo:

- **Simetria:** o círculo possui uma simetria infinita em torno de seu centro, o que significa que ele pode ser rotacionado em qualquer ângulo ao redor do centro sem que sua forma ou tamanho seja alterado.
- **Relações com o raio e diâmetro:** o diâmetro é o dobro do raio, e o comprimento da circunferência está diretamente relacionado ao raio. Essas relações são fundamentais em cálculos geométricos.
- **Ângulos Inscritos e Centrais:** em um círculo, o ângulo central (formado no centro) que intercepta um arco é o dobro do ângulo inscrito (formado por dois pontos no círculo) que intercepta o mesmo arco. Essa relação é essencial em problemas geométricos e teoremas envolvendo círculos.

Esses elementos e propriedades não apenas definem o círculo, mas também fornecem a base para muitos conceitos geométricos avançados e teoremas importantes.

Os círculos são usados em diversas áreas, desde a arquitetura e engenharia, para projetar estruturas circulares e calcular rotações, até a física, na descrição de órbitas e movimentos rotacionais. Em ferramentas como o GeoGebra, os alunos podem criar e manipular círculos, alterando o valor do raio para observar como ele influencia a circunferência e a área. Essa abordagem prática facilita a compreensão dos conceitos geométricos e de suas aplicações na vida real.

4.4 TEOREMAS RELEVANTES

Os teoremas em geometria euclidiana são proposições matemáticas comprovadas a partir de axiomas e postulados, como os estabelecidos por Euclides. Esses teoremas formam a base do estudo geométrico e possuem aplicações amplas em contextos teóricos e práticos. Na geometria plana, certos teoremas são cruciais para compreender propriedades de figuras e suas relações. Abaixo, abordamos alguns dos teoremas mais relevantes.

4.4.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é um dos princípios mais fundamentais da geometria e se aplica especificamente aos triângulos retângulos. Este teorema afirma que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados (catetos). Matematicamente, isso é expresso como:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

onde “a” é o comprimento da hipotenusa, o lado oposto ao ângulo reto, e “b” e “c” são os comprimentos dos outros dois lados. Essa relação permite calcular a medida de um lado desconhecido em um triângulo retângulo, desde que as medidas dos outros dois lados sejam conhecidas.

Aplicações do Teorema de Pitágoras:

- **Cálculo de Distâncias:** o teorema é amplamente utilizado para determinar a distância entre dois pontos em um plano cartesiano, especialmente em geometria analítica e física, onde as coordenadas são fundamentais para localizar pontos no espaço.
- **Engenharia e Construção:** em áreas como engenharia civil e arquitetura, o Teorema de Pitágoras é empregado para verificar ângulos retos e calcular distâncias em edificações, ajudando a garantir a precisão estrutural.
- **Geometria Analítica e Física:** o teorema é aplicado em fórmulas de velocidade e distância e na determinação de magnitudes vetoriais, o que é essencial para cálculos físicos.

No GeoGebra, os alunos podem construir triângulos retângulos e manipular as medidas dos catetos e da hipotenusa para visualizar como o Teorema de Pitágoras se aplica na prática. Essa abordagem visual reforça a compreensão do teorema, pois os alunos podem observar em tempo real como a soma dos quadrados dos catetos se relaciona com o quadrado da hipotenusa. Além disso, o uso interativo do software permite aos alunos experimentar com diferentes valores, consolidando o entendimento do teorema de forma dinâmica.

4.4.2 TEOREMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

O Teorema dos Ângulos Internos de um Triângulo é uma das propriedades fundamentais na geometria euclidiana. Ele estabelece que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus. Essa propriedade é válida para todos os tipos de triângulos, incluindo equiláteros, isósceles, escalenos e retângulos. A simplicidade desse teorema oculta sua importância, pois ele é a base para deduzir outras propriedades dos triângulos e até de polígonos mais complexos.

Aplicações e Exemplos:

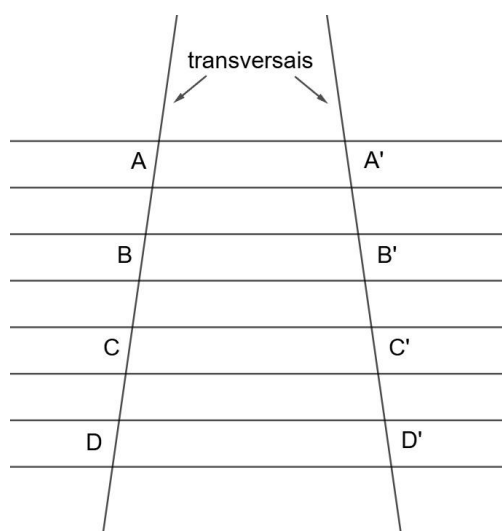
- **Triângulo Equilátero:** em um triângulo equilátero, onde todos os lados e ângulos são iguais, cada ângulo mede exatamente 60 graus, já que a soma dos ângulos deve ser 180 graus.
- **Triângulo Retângulo:** em um triângulo retângulo, um dos ângulos é de 90 graus. Logo, os outros dois ângulos devem somar 90 graus, sendo complementares entre si.
- **Resolução de Problemas:** o teorema é essencial para resolver problemas de geometria, onde um ou mais ângulos de um triângulo são desconhecidos. Ele é amplamente usado em provas e aplicações práticas, como na análise de figuras compostas por triângulos.

No GeoGebra, os alunos podem construir triângulos de diferentes tipos e manipular os ângulos para observar como a soma dos ângulos internos permanece constante em 180 graus, independentemente da forma ou do tipo do triângulo. Essa prática interativa permite uma compreensão visual e prática do teorema, reforçando o conceito de que todos os triângulos compartilham essa propriedade angular.

4.4.3 TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales é um princípio fundamental da geometria que estabelece a proporcionalidade entre segmentos de retas que são interceptados por um feixe de retas paralelas. Quando temos um conjunto de retas paralelas, chamadas de feixe de retas paralelas, e essas retas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos formados em cada transversal são correspondentes e possuem uma relação de proporcionalidade entre si, como mostra a figura 49.

Figura 49 – Representação teorema de tales.



Fonte: Elaborado pelos autores

Esses segmentos correspondentes estão localizados entre pontos de interseção de uma transversal com o feixe de retas paralelas. Por exemplo, se temos pontos A, B, C, e D em uma das transversais e pontos A', B', C', e D' na outra transversal, onde cada par de pontos, como A e A', B e B', etc. Estão sobre uma mesma reta do feixe, os segmentos formados, como AB e A'B', CD e C'D', são denominados segmentos correspondentes.

De acordo com o Teorema de Tales, existe uma constante de proporcionalidade entre esses segmentos correspondentes:

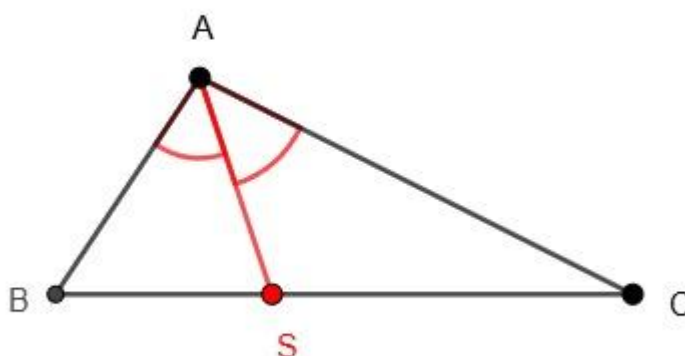
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Essa propriedade é extremamente útil para resolver problemas geométricos que envolvem comprimentos e relações entre figuras, pois permite encontrar medidas desconhecidas e estabelecer equivalências geométricas.

4.4.4 TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

O Teorema da Bissetriz Interna afirma que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados do triângulo, como mostra a figura 50.

Figura 50 – Representação bissetriz interna.



Fonte: Elaborado pelos autores

A bissetriz interna de um triângulo é um segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra no lado oposto a esse vértice. Esse segmento divide o ângulo do vértice em dois ângulos congruentes. Se S_1 pertence ao lado BC e o segmento AS_1 divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos congruentes, então AS_1 é chamado de bissetriz relativa ao lado BC ou bissetriz relativa ao vértice A.

Esse teorema é fundamental para o estudo de triângulos, pois ajuda a relacionar os lados de um triângulo com seus ângulos internos e permite a resolução de problemas que envolvem proporções. A bissetriz de um ângulo também desempenha um papel importante na construção de círculos inscritos em triângulos e outras figuras geométricas, sendo essencial em estudos mais avançados de

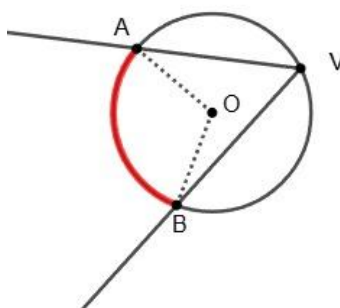
geometria.

4.4.5 TEOREMA DA CIRCUNFERÊNCIA

Um ângulo inscrito é caracterizado por ter o vértice localizado exatamente em um ponto da circunferência, com seus lados se estendendo de forma a interceptar a curva em dois pontos distintos, formando assim um arco. O arco interceptado por esse ângulo é denominado arco subentendido, e é a medida do comprimento entre os dois pontos onde os lados do ângulo encontram a circunferência. O ângulo central, por sua vez, é o ângulo que compartilha o mesmo arco com o ângulo inscrito, mas tem seu vértice no centro da circunferência.

Na figura 51, o ângulo inscrito $A\hat{V}B$ tem como arco subentendido o segmento curvo AB . Já o ângulo $A\hat{O}B$, com vértice no centro O da circunferência, é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $A\hat{V}B$. A relação entre ambos os ângulos é que o ângulo central sempre mede o dobro do ângulo inscrito que subentende o mesmo arco, o que é uma propriedade fundamental dos ângulos inscritos em uma circunferência.

Figura 51 – Representação ângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pelos autores

5. APLICAÇÃO DA PROPOSTA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para investigar a eficácia do ensino de geometria utilizando o software Geogebra em comparação com o ensino tradicional, foi realizada uma experiência pedagógica com duas turmas na qual um dos autores desse trabalho ministra aula

regularmente desde o início do aluno letivo, as turmas são do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública regular, com ensino médio durante o período da manhã e ensino fundamental final no período da tarde, localizada em uma região central da cidade de Franca, estado de São Paulo. O objetivo foi utilizar conteúdos propostos na grade curricular do 9º ano para avaliar como cada uma das duas abordagens impactava a compreensão dos conceitos geométricos pelos alunos. O planejamento, execução e análise dos resultados foram realizados de maneira estruturada e metódica, visando garantir uma comparação justa e significativa entre as duas metodologias.

5.1 PLANEJAMENTO DO ESTUDO

O estudo foi conduzido com duas turmas de 9º ano divididos por salas da qual já eram matriculados, sem realocação para divisão em número igual de participantes por turma, totalizando 56 alunos divididos em 29 e 27 em cada sala. O funcionamento do experimento foi dividido da seguinte forma:

Turma A (Controle - Ensino Tradicional): Nesta turma, o ensino foi realizado de maneira tradicional, com o uso exclusivo de ferramentas instrumentais de ensino de geometria, como o quadro, lápis, régua, compasso e materiais didáticos impressos. O professor assumiu o papel central de transmissor de conhecimento, seguindo uma metodologia expositiva, na qual explicava os conceitos de geometria e demonstrava a construção de figuras geométricas diretamente no quadro.

Turma B (Experimental - Ensino com Geogebra): Nesta turma, os alunos tiveram a oportunidade de aprender geometria de uma maneira interativa, visualizando o software Geogebra nas explicações do professor e o utilizando um computador individual no decorrer das aulas. A aula foi estruturada de forma que os alunos pudessem explorar os conceitos geométricos em tempo real, manipulando as figuras e observando imediatamente os efeitos de suas alterações.

O planejamento das aulas foi organizado em um período de três semanas, cada uma dedicada a um tema específico da geometria: propriedades das figuras geométricas, o Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales. Durante todo o processo, foi priorizada a contextualização dos conteúdos, de modo que os alunos

pudessem perceber a relevância da geometria em suas vidas cotidianas e na solução de problemas reais. As aulas foram desenhadas para que os alunos tivessem uma experiência de aprendizagem mais significativa, incorporando atividades práticas e discussões em grupo, além de algumas outras metodologias presentes no material digital do estado de São Paulo.

Além disso, foram definidos objetivos claros para cada aula, que incluíam não apenas a compreensão dos conceitos, mas também o desenvolvimento de habilidades como raciocínio lógico, resolução de problemas e trabalho em equipe. A escolha do software Geogebra se deu pela sua capacidade de proporcionar uma visualização dinâmica e interativa das figuras geométricas, permitindo que os alunos manipulassem os elementos e observassem as relações em tempo real. Essa ferramenta se mostra particularmente eficaz para a exploração de conceitos complexos, facilitando o entendimento e a fixação do conhecimento.

5.2 DIAGNÓSTICO INICIAL

Antes do início das aulas, foi aplicada uma prova diagnóstica a ambos os grupos, com o objetivo de mapear o nível de conhecimento prévio dos alunos em relação aos conceitos fundamentais da geometria e suas habilidades de resolução de problemas. A prova foi cuidadosamente elaborada para cobrir uma ampla gama de detalhes essenciais, oferecendo uma visão detalhada do domínio dos alunos sobre o conteúdo e permitindo ajustes pedagógicos para atender às necessidades específicas de cada turma.

A avaliação consistiu em 10 questões objetivas e 2 questões dissertativas, contemplando tópicos como propriedades básicas das figuras geométricas (triângulos, quadrados e círculos), explorando características de lados, ângulos e simetrias.

A aplicação prática do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos, tanto na resolução de problemas teóricos quanto em situações contextualizadas, cálculo de áreas de polígonos simples, como quadrados, retângulos e triângulos, além de exercícios práticos envolvidos em figuras, identificação e desenho de ângulos internos e externos em figuras geométricas, com destaque para a relação entre

ângulos suplementares, complementares e alternados.

Conforme figuras abaixo temos um exemplo da prova que os alunos realizaram:

Figura 52 – Prova diagnóstica

1. Qual das seguintes opções representa um triângulo equilátero?
(A) Três lados de comprimentos diferentes.
(B) Dois lados de mesmo comprimento.
(C) Três lados de mesmo comprimento.
(D) Um ângulo reto.

2. Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero?
(A) 90°
(B) 180°
(C) 270°
(D) 360°

3. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 6 cm e o outro mede 8 cm. Qual é o comprimento da hipotenusa?
(A) 10 cm
(B) 12 cm
(C) 14 cm
(D) 15 cm

4. Qual a área de um quadrado cujo lado mede 5 cm?
(A) 10 cm^2
(B) 20 cm^2
(C) 25 cm^2
(D) 30 cm^2

5. Se um círculo tem raio de 7 cm, qual é o seu diâmetro?
(A) 7 cm
(B) 14 cm
(C) 21 cm
(D) 28 cm

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 53 – Prova diagnóstica

6. Qual das seguintes figuras possui todos os ângulos internos iguais e lados de mesmo comprimento?
 (A) Retângulo
 (B) Trapézio
 (C) Quadrado
 (D) Losango

7. O Teorema de Pitágoras é aplicado a qual tipo de triângulo?
 (A) Triângulo equilátero
 (B) Triângulo isósceles
 (C) Triângulo retângulo
 (D) Triângulo obtusângulo

8. Qual é a área de um triângulo com base de 10 cm e altura de 5 cm?
 (A) 15 cm^2
 (B) 20 cm^2
 (C) 25 cm^2
 (D) 50 cm^2

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 54 – Prova diagnóstica

9. Em um triângulo isósceles, quais elementos têm o mesmo comprimento?
 (A) Apenas os lados
 (B) Apenas os ângulos
 (C) Dois lados e dois ângulos
 (D) Todos os lados e ângulos

10. Qual é o valor de um ângulo raso?
 (A) 45°
 (B) 90°
 (C) 180°
 (D) 360°

11. Um estudante precisa instalar uma rampa para cadeirantes na escola. A rampa terá 6 metros de comprimento e será apoiada a uma altura de 2 metros. Calcule a distância horizontal que a rampa ocupará no chão, utilizando o Teorema de Pitágoras. Mostre todos os cálculos e explique sua resposta.

12. Primeiramente explique o que é uma reta, em seguida desenhe um exemplo de retas paralela e outro de retas perpendiculares:

Fonte: Elaborado pelos autores

Após a resolução das provas, os resultados indicaram que, em média, as duas turmas obtiveram desempenhos semelhantes, com uma taxa de acerto próxima de 62%, com a turma A, e 53% com a turma B. Foi feita uma retirada de valores extremos individuais para que os resultados gerais pudessem se equilibrar mais, ficando próximos de 58%, essa técnica consiste em retirar os outliers que são valores muito longe da medida de tendência central geral, permanecendo então somente os valores centrais próximos, essa homogeneidade inicial foi crucial para garantir que a comparação entre os dois métodos de ensino, tradicionais e com o uso do software GeoGebra, fosse justa e equilibrada. A partir dessa avaliação, foi possível constatar que as principais dificuldades dos alunos incluíam a falta de familiaridade com as propriedades das figuras geométricas e a dificuldade em aplicar o Teorema de Pitágoras em situações práticas. Esses dados serviram como base para o ajuste do planejamento das aulas, de modo a abordar de forma mais enfática essas lacunas de conhecimento e promover uma progressão pedagógica mais eficaz.

Além de verificar o conhecimento técnico, a prova diagnóstica também incluiu questões que estimularam os alunos a refletir sobre a relevância da geometria no cotidiano. Foram explorados exemplos práticos que conectavam os conceitos geométricos ao dia a dia, como a aplicação da geometria na arquitetura, na arte e na resolução de problemas cotidianos. Essa estratégia tinha como objetivo não apenas avaliar o conhecimento prévio dos alunos, mas também os motivou e gerou um interesse mais profundo pelo aprendizado dos conteúdos. Ao trazer questões contextualizadas, foi possível envolver os alunos de maneira mais significativa, incentivando a criação de conexões entre aqueles que estudam na sala de aula e suas vivências e experiências.

Essa abordagem reflexiva e motivacional ajudou a despertar o interesse dos alunos e contribuiu para o engajamento inicial, preparando-os para o desenvolvimento do conteúdo de maneira mais ativa, seja no contexto do ensino tradicional ou com o uso do Geogebra no ensino experimental.

5.3 EXECUÇÃO DAS AULAS

A execução das aulas foi planejada com cuidado, proporcionando uma experiência de aprendizagem significativa para os alunos seguindo o planejamento das aulas do repositório digital. Ao longo de três semanas, as turmas A e B participaram de atividades estruturadas que abordaram três temas centrais da geometria: propriedades das figuras geométricas, o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales. Cada aula foi cuidadosamente elaborada para respeitar o ritmo dos alunos e suas necessidades educacionais, garantindo que todos possam acompanhar e se envolver com os conteúdos propostos.

5.3.1 Turma A - Ensino Tradicional

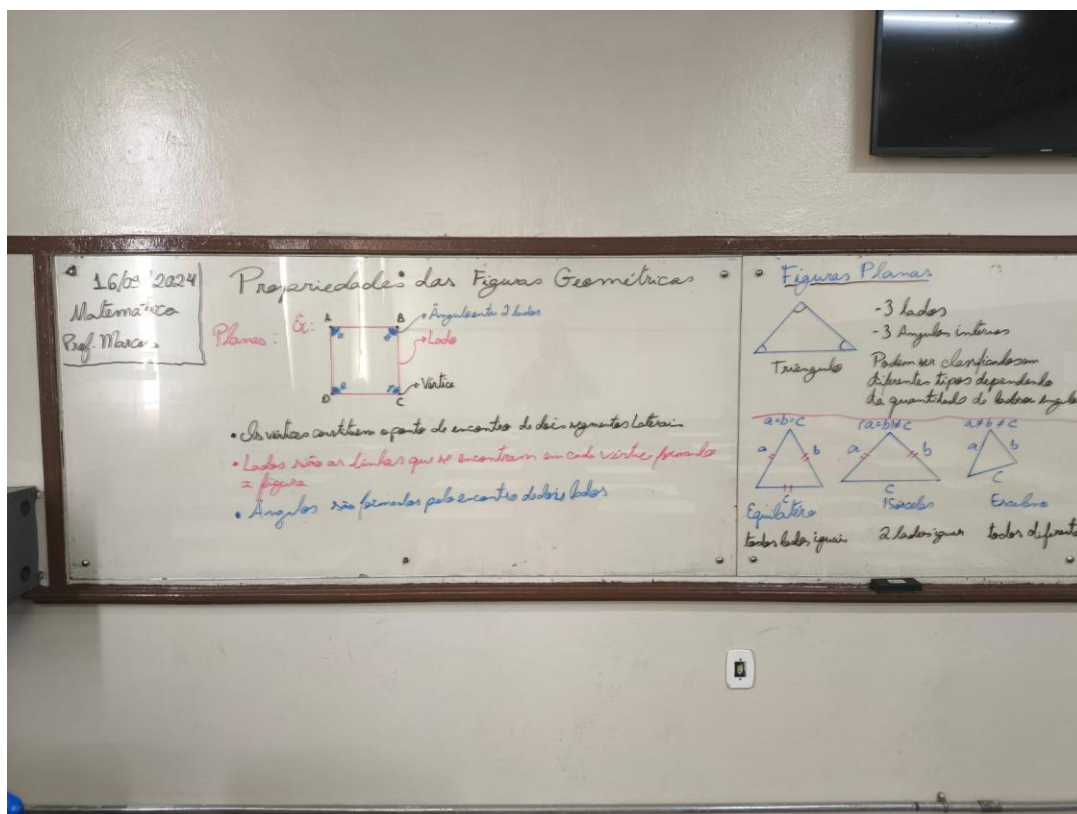
A execução das aulas na Turma A, onde foi empregada a metodologia de ensino tradicional, seguiu uma abordagem expositiva e prática, com foco em ferramentas convencionais para o ensino de geometria. Durante as três semanas de atividades, os conteúdos foram abordados de maneira sequencial e objetiva, acompanhando a progressão dos temas previstos no planejamento: propriedades das figuras geométricas, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales.

Durante as aulas as metodologias utilizadas foram focadas em o professor assumir um papel central no processo de ensino, sendo o responsável pela exposição dos conteúdos e pela demonstração das aplicações geométricas. O uso de ferramentas tradicionais como o quadro negro, lápis, régua, compasso e materiais didáticos impressos foi preponderante. Através dessas ferramentas, o professor desenhou figuras geométricas e construiu elementos no quadro, enquanto explicava suas propriedades e demonstrava conceitos teóricos. O objetivo era promover um entendimento formal dos conteúdos, com ênfase na precisão técnica e na aplicação mecânica das regras geométricas. Cada aula iniciou-se com uma explicação teórica dos conceitos, seguida de exemplos práticos resolvidos no quadro pelo professor. A interação com os alunos ocorreu por meio de perguntas e respostas, além da solicitação de que realizassem exercícios nos cadernos, a fim de fixar o conteúdo abordado. Apesar do ambiente ser mais passivo, em que o professor transmitia a informação e os alunos seguiam as instruções, o feedback constante foi fundamental para identificar dificuldades e promover ajustes no ritmo das aulas, muitos alunos demonstraram dificuldades em compreender a aplicação prática desses conceitos,

principalmente quando os alunos foram solicitados a realizar construções geométricas em papel, o que gerou frustração e desmotivação entre aqueles que tinham dificuldades em visualização espacial.

A Organização do conteúdo se deu conforme planejamento inicial, divididos em três grandes blocos temáticos começando por propriedades das figuras geométricas na primeira semana e foi dedicada ao estudo das figuras geométricas básicas, como triângulos, quadrados, retângulos e círculos. Os alunos aprenderam a identificar as características dessas figuras, tais como a relação entre seus lados, ângulos e simetrias. O professor fez uso do quadro negro para desenhar cada figura e demonstrar suas propriedades, incentivando os alunos a reproduzirem essas figuras e a verificarem, por meio da régua e do compasso, a precisão de seus traços.

Figura 55 – Desenhos figuras geométricas no quadro.

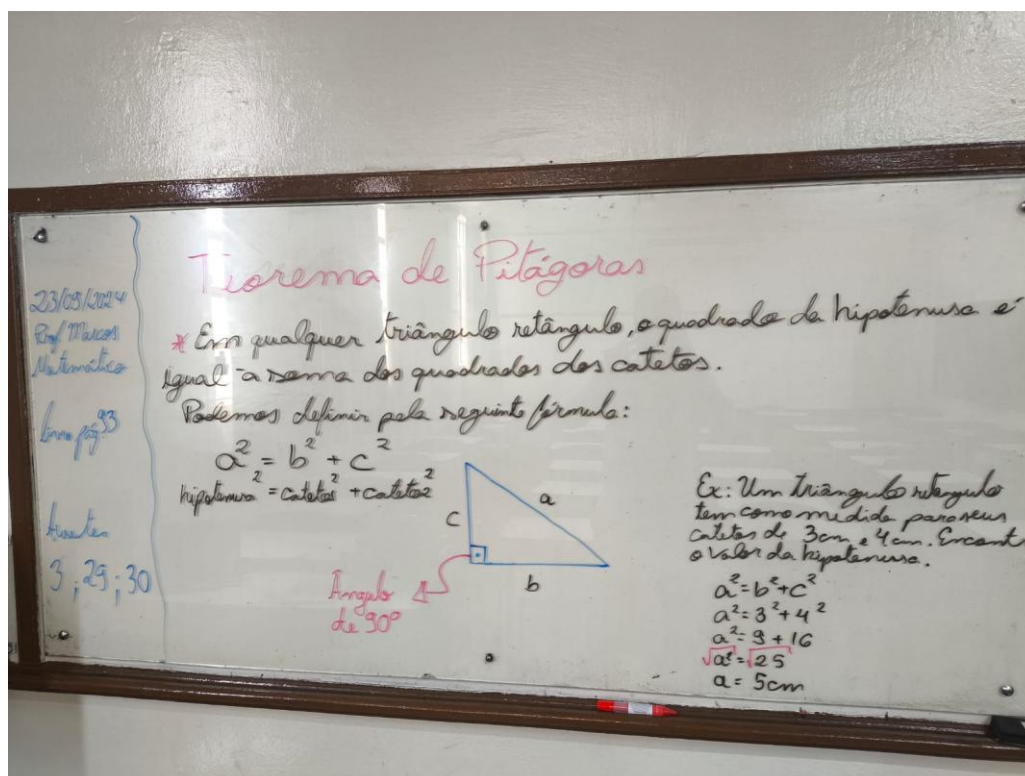


Fonte: Elaborado pelos autores

Já na segunda semana, o foco foi o Teorema de Pitágoras. O professor expôs a fórmula e, em seguida, demonstrou exemplos práticos aplicados a triângulos retângulos. Foi explicado como utilizar o teorema para calcular o comprimento de um

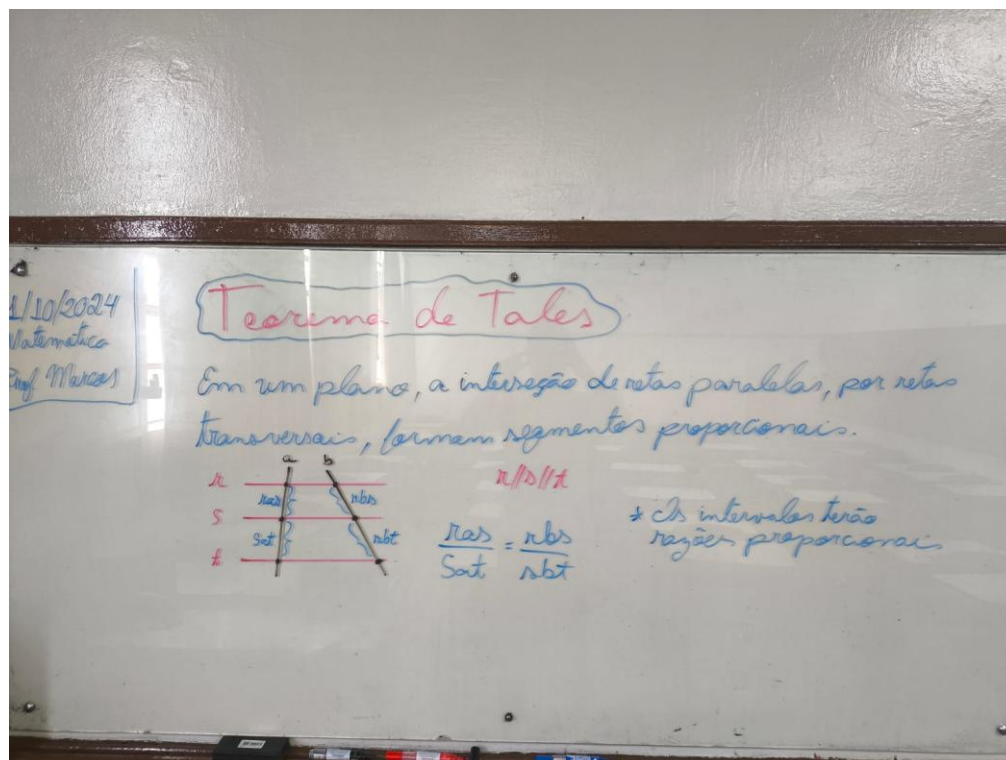
dos lados de um triângulo, dado que os outros dois lados fossem conhecidos. Embora o método de ensino tenha sido mais teórico, a prática foi introduzida por meio de exercícios no quadro e a resolução individual em sala, onde os alunos eram incentivados a aplicar o teorema em diferentes situações. Na terceira e última semana, o foco das aulas foi o Teorema de Tales, aplicado principalmente à semelhança de triângulos e à divisão proporcional de segmentos, tendo o professor novamente utilizado o quadro para explicar o conceito e apresentar problemas que poderiam ser resolvidos aplicando o teorema. As construções geométricas foram feitas no quadro, e os alunos acompanharam os passos do professor para garantir o entendimento dos princípios envolvidos.

Figura 56 – Aplicação teorema de Pitágoras em sala.



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 57 – Aplicação teorema de tales em sala.



Fonte: Elaborado pelos autores

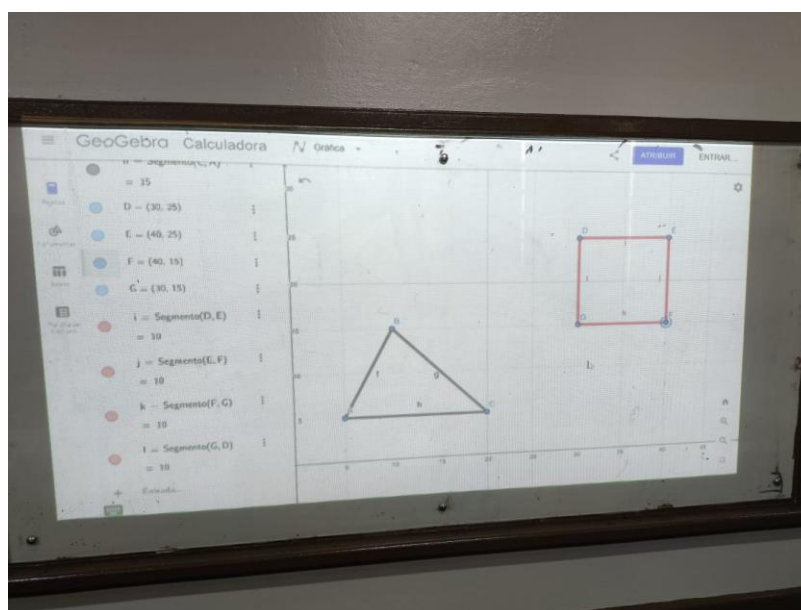
A participação da Turma A foi mais passiva em comparação à Turma B, dado que a metodologia tradicional coloca o professor como o foco do processo de ensino. Embora os alunos tivessem oportunidade de fazer perguntas e resolver exercícios propostos, o nível de interação foi limitado ao formato de aula expositiva. O tempo dedicado a cada aluno para esclarecer dúvidas era restrito, o que fez com que muitos permanecessem em dificuldades até o final da aula, isso foi perceptível principalmente em tópicos mais complexos, como o Teorema de Pitágoras e a aplicação prática do Teorema de Tales. Apesar disso, os alunos que já apresentavam certa facilidade com o conteúdo geométrico conseguiram acompanhar o ritmo e tiveram um bom desempenho nas atividades, enquanto aqueles que tinham mais dificuldade mostraram-se desmotivados em alguns momentos, o que prejudicou o engajamento geral da turma.

5.3.2 Turma B - Ensino com Geogebra

Na Turma B, o ambiente de aprendizagem foi transformado pela utilização do software Geogebra, no qual cada aluno teve acesso a um computador e ao software, permitindo uma interação direta e dinâmica com as figuras geométricas. As aulas foram estruturadas de forma a permitir que os alunos explorassem os conceitos geométricos visualmente, manipulando figuras e observando suas transformações em tempo real. O professor iniciou a aula com uma breve explicação teórica, mas logo incentivou os alunos a explorarem os conceitos no Geogebra, passando por uma explicação sobre as funcionalidades do software, tendo em vista que domina-lo facilitaria para eles entender também os conteúdos de matemática.

Assim como na Turma A, os conteúdos da Turma B foram divididos nos mesmos três grandes blocos temáticos, começando por propriedades das figuras geométricas. Os alunos exploraram as propriedades das figuras geométricas, como triângulos, quadrados e círculos, por meio do Geogebra. O software permitiu que eles construíssem essas figuras e verificassem suas características, como ângulos internos, simetrias e relações entre lados. A interatividade do Geogebra proporcionou uma compreensão mais visual e prática das propriedades geométricas, facilitando o aprendizado de conceitos mais abstratos.

Figura 58 – Aplicação propriedades das figuras geométricas utilizando GeoGebra.

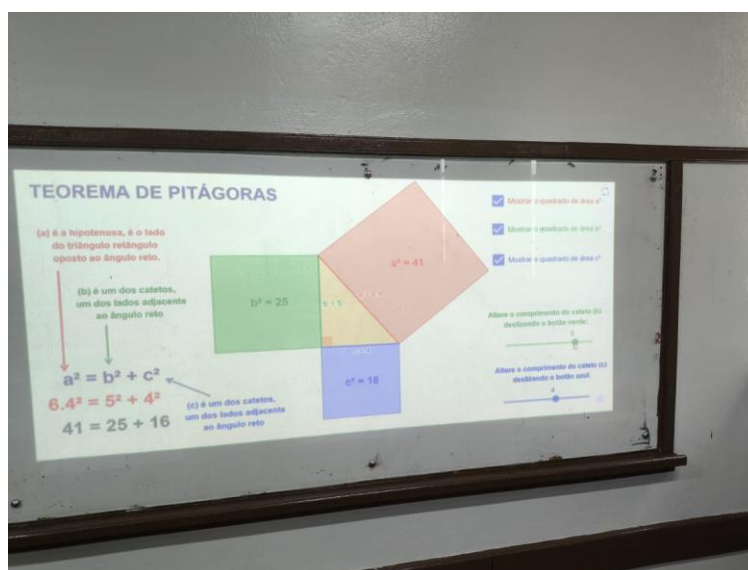


Fonte: Elaborado pelos autores

Na segunda semana, as aulas focaram no Teorema de Pitágoras, onde o uso do Geogebra transformou a compreensão do conceito de maneira significativa. O professor começou apresentando situações práticas e do cotidiano, como o cálculo de distâncias entre dois pontos ou a determinação da altura de um edifício usando sombras, contextualizando o uso do teorema. Com o auxílio do software, os alunos puderam criar e manipular triângulos retângulos dinâmicos, ajustando os comprimentos dos lados e observando de forma interativa a relação entre eles, conforme a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

Essa abordagem prática permitiu que os alunos visualizassem a aplicação direta do Teorema de Pitágoras em diferentes configurações. Ao modificarem os lados de do triângulo no Geogebra, os alunos observaram em tempo real como as relações entre os catos e a hipotenusa se mantinham, independentemente do tamanho ou da posição do triângulo. Essa manipulação visual e imediata tornou o conceito mais tangível, permitindo que os alunos compreendessem a aplicação do teorema em diferentes contextos de maneira mais profunda e intuitiva. A interação com as figuras e a capacidade de testar múltiplos cenários ajudaram a consolidar a compreensão teórica e prática, fazendo com que os alunos percebessem as conexões entre a geometria e os problemas do mundo real, como citado por um aluno que viu nas explicações, cálculos que o pai faz quando está trabalhando de pedreiro.

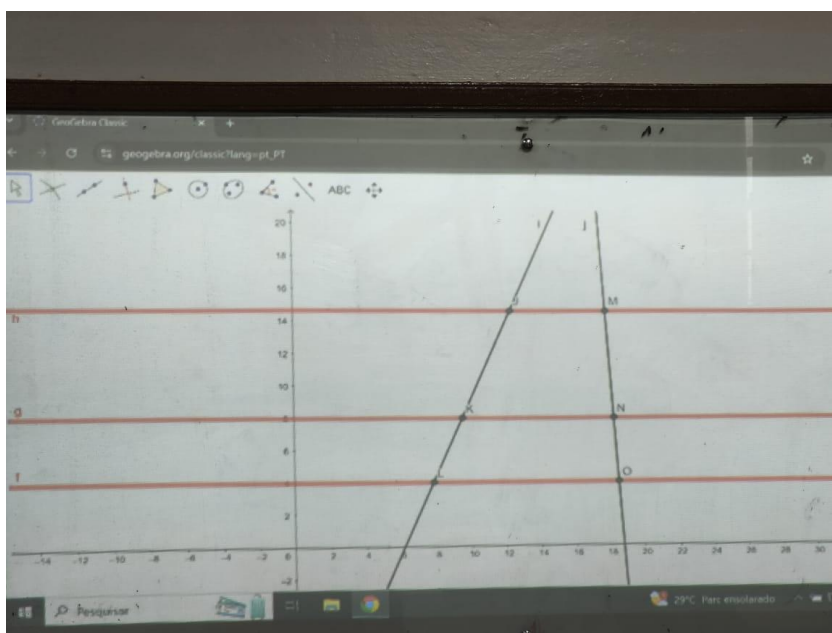
Figura 59 – Aplicação do teorema de Pitágoras utilizando o GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelos autores

Ao final, na terceira semana, o estudo se concentrou no Teorema de Tales, e novamente o Geogebra desempenhou um papel crucial na facilitação da compreensão do conceito. Os alunos foram orientados a construir triângulos semelhantes no software e a dividir segmentos proporcionais, visualizando de maneira dinâmica como o teorema se manifestava geometricamente. O professor explicou a importância do teorema na história da matemática e suas diversas aplicações práticas, como a medição de alturas inacessíveis ou a relação de proporções em figuras geométricas.

Figura 60 – Aplicação do teorema de Tales utilizando o GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelos autores

Com o Geogebra, os alunos foram capazes de manipular os elementos das construções geométricas, ajustando os pontos de interseção e verificando em tempo real como as proporções se mantinham constantes. Eles puderam experimentar diferentes configurações de triângulos e segmentos, observando as semelhanças entre figuras geométricas e como o Teorema de Tales se aplicava de maneira precisa e consistente em todas as situações.

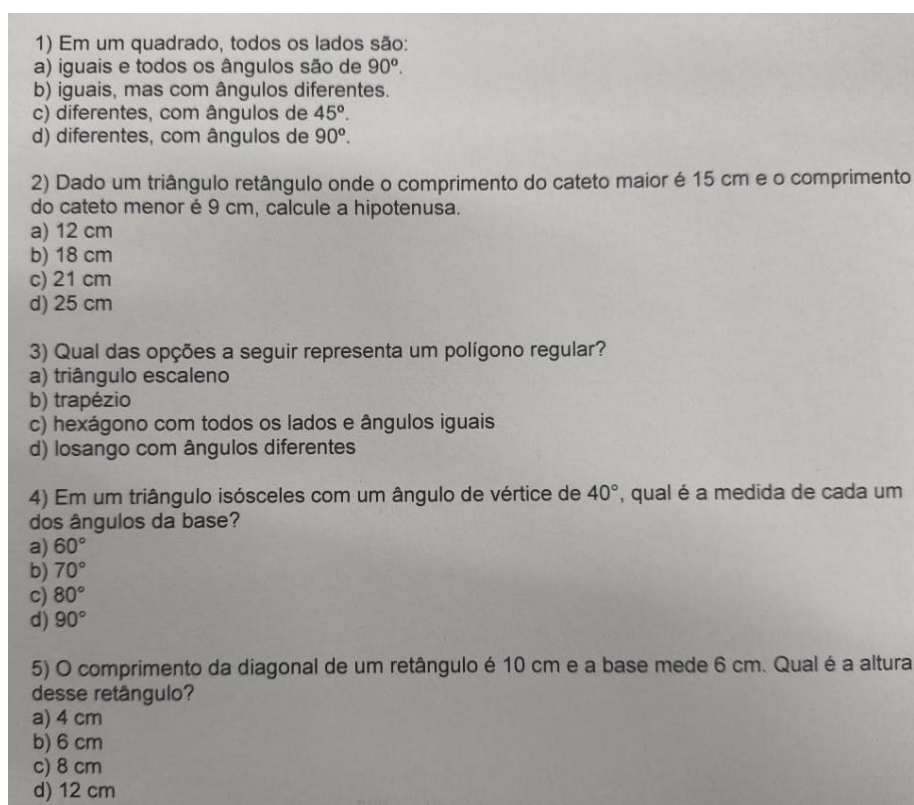
A metodologia adotada nas aulas da Turma B favoreceu uma aprendizagem ativa e envolvente, proporcionando uma experiência de aprendizagem rica e significativa. Os alunos relataram um aumento na motivação e no interesse pela

geometria, afirmando que a possibilidade de visualizar e interagir com os conceitos facilitou a compreensão e despertou a curiosidade. A utilização do Geogebra não apenas enriqueceu o conteúdo abordado, mas também contribuiu para o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas.

5.4 AVALIAÇÃO FINAL

Após a conclusão das três semanas de aulas, foi realizada uma avaliação final para medir o desempenho dos alunos das duas turmas e comparar os efeitos das metodologias de ensino aplicadas. A prova final, semelhante à diagnóstica, envolveu 8 questões objetivas e 4 dissertativas sobre propriedades das figuras geométricas, o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales, permitindo uma análise aprofundada do progresso dos alunos em relação à compreensão dos conceitos e sua aplicação prática.

Figura 61 – Avaliação final



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 62 – Avaliação final

6) Qual das opções abaixo é verdadeira sobre o teorema de Tales?

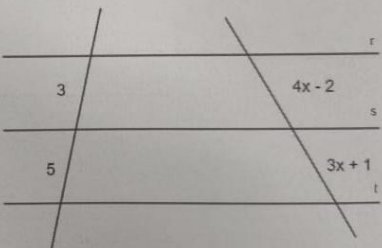
- é usado para calcular áreas de triângulos.
- define a relação entre as diagonais de um quadrado.
- diz que retas paralelas cortadas por transversais dividem-se em segmentos proporcionais.
- aplica-se apenas em triângulos equiláteros.

7) Em um círculo de raio 5 cm, qual é o comprimento da circunferência?
(use $\pi \approx 3,14$)

- 15,7 cm
- 31,4 cm
- 25 cm
- 50 cm

8) Sabendo que as retas r , s e t são paralelas e analisando a imagem, podemos afirmar que x é igual a aproximadamente:

- 1,10
- 1,18
- 1,20
- 1,25
- 1,29



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 63 – Avaliação final

9) Um poste de luz de 10 metros de altura projeta uma sombra de 8 metros. Qual é a distância entre o topo do poste e o final da sombra no chão? Resolva utilizando o teorema de Pitágoras e mostre cada etapa do cálculo.

10) Explique o teorema de Tales e forneça um exemplo prático em que ele pode ser aplicado para determinar distâncias. Demonstre o cálculo completo.

11) Um arquiteto deseja medir a altura de um poste sem escalá-lo. Ele utiliza uma régua de 1 metro na vertical e projeta uma sombra de 0,4 metros. Observando que a sombra do poste é de 3 metros, calcule a altura do poste usando o teorema de Tales. Explique os passos realizados.

12) Explique como os conceitos de geometria (ângulos, retas paralelas e perpendiculares, etc.) podem ser úteis para um engenheiro civil em um projeto de construção. Cite pelo menos dois exemplos de uso prático desses conceitos em obras reais.

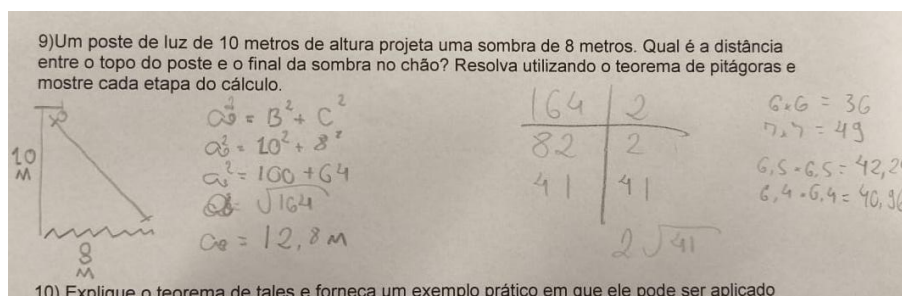
Fonte: Elaborado pelos autores

Os resultados mostraram uma clara diferença entre as turmas. Na Turma A, que melhorou o método de ensino tradicional, houve uma melhoria moderada no desempenho em comparação com o diagnóstico inicial. A média de acertos aumentou de 58% para 65%. Embora alguns alunos, especialmente aqueles que já tinham maior facilidade com a disciplina, tenham mostrado progresso, a maioria ainda apresentou dificuldades em aplicar os conceitos geométricos de maneira prática. Muitos alunos replicaram fórmulas nas respostas dissertativas sem demonstrar uma compreensão mais profunda, o que evidenciava as limitações da abordagem expositiva e passiva, onde o foco estava na memorização de regras e fórmulas, e não na aplicação contextualizada dos conceitos.

Já na Turma B, que utilizou o Geogebra como ferramenta de ensino, os resultados foram notavelmente superiores. O desempenho médio saltou de 58% para 76%, indicando um impacto significativo da metodologia mais interativa. O uso do software permitiu aos alunos uma visualização dinâmica dos conceitos geométricos, o que facilitou a compreensão tanto das propriedades das figuras quanto dos teoremas. Na avaliação final, esses alunos aprenderam uma capacidade muito maior de aplicar os conceitos treinados em situações práticas. Eles apenas não souberam usar corretamente o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales, mas também foram capazes de explicar de maneira detalhada e clara as relações relacionadas envolvidas.

As questões dissertativas revelaram a diferença mais evidente entre as duas metodologias. Enquanto os alunos da Turma A permaneciam presos à reprodução de fórmulas e respostas mais superficiais, os alunos da Turma B exploravam os conceitos com mais profundidade. Um exemplo notável foi a explicação de um aluno da Turma B sobre como o Teorema de Pitágoras é aplicado na construção civil, uma referência direta aos exemplos práticos propostos durante as aulas com o Geogebra. Esse tipo de conexão entre o conteúdo teórico e o mundo real foi um diferencial claro da turma que utilizou o software, resultando em um entendimento mais completo e significativo dos conceitos geométricos.

Figura 64 – Exemplo de resolução feita por aluno.



Fonte: Elaborado pelos autores

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações finais deste trabalho destacam a relevância de incorporar metodologias pedagógicas que priorizem a interação, a visualização e a exploração dinâmica no ensino de geometria, conceitos amplamente discutidos no referencial teórico, sintetizando a análise das metodologias de ensino aplicadas nas turmas A e B, destacando a importância de integrar ferramentas tecnológicas no ensino da Matemática, especialmente na geometria. Fundamentado em autores que apontam a importância da construção ativa do conhecimento e do uso de tecnologias educacionais para promover a aprendizagem significativa, este estudo partiu de uma questão central: como as metodologias tradicionais no ensino de geometria podem limitar o aprendizado e a motivação dos alunos, e em que medida a adoção de tecnologias educacionais, como o **GeoGebra**, pode aprimorar esse processo.

O objetivo do trabalho foi comparar uma abordagem tradicional aprimorada com uma abordagem que incorpora o **GeoGebra** como ferramenta pedagógica, a fim de avaliar o impacto na compreensão e aplicação dos conceitos geométricos pelos alunos. Para isso, foi realizada uma pesquisa em duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, nas quais foram abordados conteúdos como propriedades das figuras geométricas, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales.

A comparação entre as abordagens revelou uma diferença de 11% nos métodos utilizados. A **Turma A**, que utilizou um método de ensino tradicional aprimorado, apresentou um avanço moderado, com um aumento na média de acertos de 58% para 65%. No entanto, as limitações dessa abordagem tornaram-se evidentes nas respostas dissertativas, onde muitos alunos limitaram-se à reprodução de fórmulas, sem demonstrar uma compreensão mais profunda dos conceitos. Esse

resultado sugere que métodos expositivos, focados na memorização, não são suficientes para promover uma compreensão abrangente e aplicada da matemática.

Por outro lado, a **Turma B**, que utilizou o **GeoGebra** como ferramenta pedagógica, apresentou uma evolução notável, com um aumento na média de acertos de 58% para 76%. O uso do software possibilitou uma exploração ativa dos conceitos geométricos, permitindo que os alunos visualizassem e manipulassem figuras de forma dinâmica. Essa interatividade proporcionou uma compreensão mais intuitiva e profunda dos conteúdos, evidenciada nas respostas dissertativas, onde os alunos demonstraram conexões claras entre a teoria e sua aplicação prática. Um exemplo disso foi a aplicação do Teorema de Pitágoras em contextos como a construção civil, o que reforçou a relevância dos conceitos geométricos na vida real.

Além disso, a experiência com o **GeoGebra** promoveu um ambiente de aprendizagem que incentivou o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o pensamento crítico e a resolução de problemas. Os relatos dos alunos da Turma B indicaram um aumento na motivação e no interesse pela geometria, evidenciando que metodologias ativas e interativas têm o potencial de transformar a experiência de aprendizado em um processo mais envolvente e significativo.

Os resultados obtidos confirmam que a integração de tecnologias educacionais, como o **GeoGebra**, no ensino da Matemática pode promover melhorias substanciais na compreensão e aplicação dos conceitos geométricos. Em vez de uma aprendizagem centrada na memorização, a tecnologia favorece o desenvolvimento de habilidades práticas e cognitivas, como a visualização espacial e o raciocínio lógico, essenciais para o aprendizado da geometria.

Esse estudo reforça a necessidade de uma reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas atuais e aponta para a importância de metodologias que priorizem a interação, a exploração e a contextualização dos conteúdos matemáticos. A incorporação de tecnologias educacionais no ensino da geometria não só contribui para a construção de uma base sólida de conhecimentos, mas também prepara os alunos para um futuro no qual a fluência digital e as habilidades analíticas serão cada vez mais essenciais.

Por fim, este trabalho contribui para a discussão sobre a inovação no ensino da matemática, sugerindo que a adoção de ferramentas como

o **GeoGebra** pode transformar a educação matemática e promover uma aprendizagem mais significativa, que conecta o conteúdo acadêmico com a realidade dos alunos e os prepara para desafios futuros.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção do Professor de Matemática), 1995.

Boaler, J. **Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning**. Lawrence Erlbaum Associates, 1997.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Autêntica Editora, 2001.

CATTAL, A. P. **O GeoGebra nas aulas de Matemática**. In: I Encontro de Matemática do CEFET-BA, Salvador: CEFET-BA, 2007.

COUCEIRO, Karen Cristine Uaska dos Santos. **Geometria euclidiana**. 2. ed. Curitiba, PR: Intersaberes, 2023. *E-book*. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 16 out. 2024.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. (2013). **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. vol 9. ed 9. Atual Editora.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. **Investigando a Matemática na Escola: Diferenças, Metodologias e Práticas**. Autêntica Editora, 2006.

Freire, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. Paz e Terra, 1996.

LEVI, B. **Lendo Euclides: a matemática e a geometria sob um olhar renovador**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/angulos>. Acesso em: 19 out. 2024.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. **A Árvore do Conhecimento: As Bases Biológicas do Entendimento Humano**. Editora Palas Athena, 1992.

Piaget, J. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**. Zahar Editores, 1975.

Ponte, J. P **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Porto Editora, 2002.

Valente, J. A. **Formação de Professores e o Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação**. In: Tecnologia na Educação: Ensinando e Aprendendo com as TIC, 2005.

Valente, J. A. **O Uso de Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação: Uma Análise dos Desafios e Possibilidades**. Editora Papirus, 1999.