

AUTOVALORES E AUTOVETORES: aplicados a Cadeias de Markov, Crescimento Populacional, PageRank e Hubs Logísticos.

Isabela Figueiredo Dos Reis Silva
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
isahfigueiredo@hotmail.com

Isabella Plácido De Paula Oliveira
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
isbellaplacido2111@gmail.com

Lucinda Maria de Fátima R. Coelho
Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

RESUMO

Com o intuito de apresentar algumas aplicações de autovalores e autovetores, este trabalho aborda a estrutura, funcionamento e alguns tipos de modelos estocásticos. Descreve também, a função de eventos probabilísticos e como se calcula, por meio de matrizes de transição, a ocorrência de futuros eventos em determinado tempo discreto. O estudo engloba aplicações de autovalores e autovetores em Cadeias de Markov, para encontrar a distribuição estacionária, que representa as probabilidades de longo prazo de estar em cada estado do sistema; em problemas de crescimento populacional, onde são usados para entender como as populações de diferentes espécies evoluem ao longo do tempo; no PageRank, em que o autovetor associado ao maior autovalor ajuda a determinar a importância relativa das páginas na web e identificar a centralidade em redes de transporte por meio de Hubs Logísticos, aqueles que têm conexões mais significativas na rede aérea. Autovalores e autovetores são conceitos matemáticos essenciais que têm uma ampla gama de aplicações em diversas áreas, incluindo análise de sistemas de Cadeias de Markov, modelagem de Crescimento Populacional, classificação de páginas da web no PageRank, identificação de Aeroportos Hub em sistemas de transporte aéreo e outros, permitindo compreender a dinâmica, estabilidade e importância de diferentes elementos em sistemas complexos.

Palavras-Chave: Autovalores. Autovetores. Cadeias de Markov. PageRank. Hubs Logísticos.

ABSTRACT

In order to present some applications of eigenvalues and eigenvectors, this paper discusses the structure, functioning and some types of stochastic models. It also describes the function of probabilistic events and how the occurrence of future events in a given discrete time can be calculated using transition matrices. The study includes applications of eigenvalues and eigenvectors in Markov Chains, to find the stationary distribution, which represents the long-term probabilities of being in each state of the system; in population growth problems, where they are used to understand how populations of different species evolve over time; in PageRank, where the eigenvector associated with the largest eigenvalue helps to determine the relative importance of web pages and to identify centrality in transportation networks by means of Logistics Hubs, those with the most significant connections in the air network. Eigenvalues and eigenvectors are essential mathematical concepts that have a wide range of applications in various areas, including analysis of Markov Chain systems, Population Growth modeling, PageRank ranking of web pages, identification of Hub airports in air transport systems and others, allowing us to understand the dynamics, stability and importance of different elements in complex systems.

Keywords: Eigenvalues. Eigenvectors. Markov chains. PageRank. Logistic Hubs.

1 INTRODUÇÃO

Autovalores e autovetores são conceitos fundamentais na teoria de matrizes e álgebra linear. Um autovalor, representado por λ , de uma matriz A é um escalar que satisfaz a equação $Av^{\vec{}} = \lambda v^{\vec{}}$, onde v é um autovetor associado a λ . O autovetor é uma coluna não nula da matriz que é multiplicada por A , resultando em um estiramento ou rotação pelo fator λ . Neste trabalho, são investigadas várias propriedades por meio do cálculo de autovalores e autovetores de matrizes. Ao considerar uma matriz quadrada, um autovalor λ real é associado a um autovetor $v^{\vec{}} \neq 0$ se a multiplicação $Av^{\vec{}}$ resulta em $\lambda v^{\vec{}}$, e o cálculo deste autovalor pode ser realizado através das raízes do polinômio característico.

Esses conceitos têm aplicações abrangentes em diversos campos da Física, Matemática, Engenharia, Ciência da Computação, entre outros. Em que os autovalores e autovetores são aplicados em:

- Análise de sistemas dinâmicos, estudam a estabilidade e a evolução temporal de sistemas dinâmicos;
- Física quântica, representam os estados quânticos do sistema;
- Aprendizado de máquina, são empregados na redução de dimensionalidade de dados e na visualização de padrões em conjuntos de dados;
- Processamento de imagens, são utilizados na análise de componentes principais (PCA), uma técnica para a extração de características relevantes de imagens;
- Outros.

Neste trabalho são abordados:

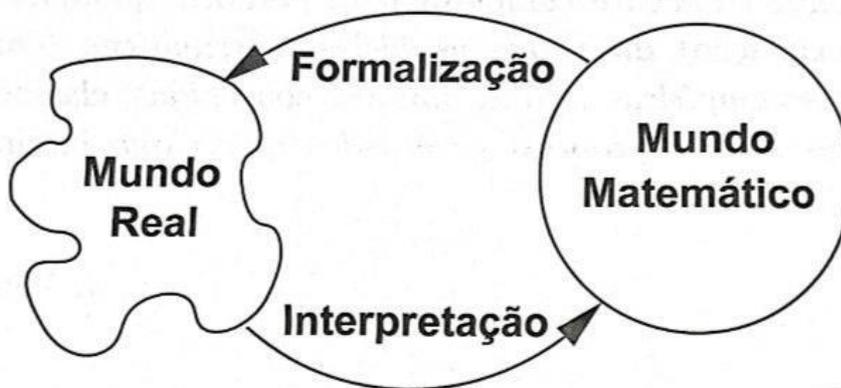
- Modelagem matemática, que consiste um processo dinâmico para validar e modelos matemáticos apresentado usando termos familiares, como expressões numéricas, fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, entre outros.
- Cadeias de Markov, onde os autovalores e autovetores são usados para encontrar a distribuição estacionária, que representa as probabilidades de transição de estados em um sistema que muda com o tempo. Os autovetores representam as distribuições de probabilidade estáveis, enquanto os autovalores indicam as taxas de convergência para o equilíbrio;
- Modelos de crescimento populacional, os autovalores e autovetores podem ser usados para analisar o comportamento a longo prazo de uma população. Os autovalores indicam as taxas de crescimento ou declínio, enquanto os autovetores representam as distribuições estáveis da população ao longo do tempo;
- PageRank do Google, os autovalores e autovetores são usados para classificar páginas da web com base em sua relevância. Os autovetores representam a importância relativa das páginas, e os autovalores indicam o grau de influência de cada página;
- Hubs Logísticos, são locais determinados pelas empresas de forma estratégica para facilitar a redistribuição de mercadorias. Trata-se de um processo bastante versátil e que traz benefícios para todos o transporte em diferentes tipos de setores, como o rodoviário, o hidroviário e o ferroviário. Mais especificamente em Aeroportos Hub, os autovalores e autovetores podem ser aplicados para identificar a centralidade dos aeroportos na rede de transporte aéreo. Os autovetores podem revelar quais aeroportos desempenham um papel crucial na conectividade da rede.

Os autovalores e autovetores são ferramentas poderosas e versáteis para analisar sistemas dinâmicos, como Cadeias de Markov, modelar o crescimento populacional, identificar a centralidade em redes de transporte, classificar páginas da web e outros, ajudando a entender o comportamento de sistemas complexos e a tomar decisões informadas em uma variedade de aplicações.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obter e validar modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. Consiste, em sua essência, em transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2014).

Figura 1 – Esquema simplificado sobre Modelagem Matemática



Fonte: BASSANEZI, 2014

A estatística desempenha um papel importante na sociedade moderna, pois fornece ferramentas para analisar variáveis de diferentes perspectivas, verificar possíveis relações por meio de pesquisas e experimentos e, assim, fornecer um caminho coerente e direto para possíveis decisões.

Como método científico, alguns pontos que podem ser relevantes: estimular novas ideias e técnicas experimentais; dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos; um método para fazer interpolação, extrapolação e previsões; sugerir prioridades de aplicações de recursos e tomada de decisão; preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais; recurso para entender melhor a realidade; e linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas de conhecimento (BASSANEZI, 2014).

De acordo com Biembengut e Hein (2014), quando se fala em modelagem, vem à mente a imagem de um escultor habilidoso trabalhando com argila para dar forma a um objeto. Esse objeto é considerado um modelo. O escultor utiliza recursos como argila, técnicas, intuição e criatividade para criar seu modelo, que certamente representa algo, seja algo real ou fruto da imaginação. De acordo com o Dicionário da língua portuguesa, o termo "modelo" refere-se a uma representação de algo, como uma maquete, ou um padrão ou ideal a ser alcançado, como uma pessoa, ou ainda um tipo específico pertencente a uma série, como um modelo de carro.

A elaboração de modelos para compreender os fenômenos naturais e sociais é uma característica intrínseca do ser humano, que sempre recorreu a modelos tanto para se comunicar com outros indivíduos quanto para planejar ações. Nesse sentido, a modelagem é um processo que surge da própria razão e desempenha um papel fundamental em nossa vida, servindo como meio de construção e expressão do conhecimento.

Existem diversas situações no mundo real que podem apresentar problemas que exigem soluções e decisões. Alguns desses problemas envolvem fatos matemáticos relativamente simples, requerendo o uso da Matemática. Independentemente do caso, a resolução de um problema, especialmente quando envolve quantificação, necessita de uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, o conjunto de símbolos e relações matemáticas que buscam representar, de alguma forma, um fenômeno ou uma situação real é denominado modelo matemático.

“Na ciência, a noção de modelo é fundamental. Em especial a Matemática, com sua arquitetura, permite a elaboração de modelos matemáticos, possibilitando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado” (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.12).

Um modelo pode ser apresentado usando termos familiares, como expressões numéricas, fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, entre outros. No entanto, é importante ressaltar que quando um modelo é proposto, ele é baseado em aproximações que nem sempre correspondem à realidade, mas são utilizadas para obter uma melhor compreensão de um fenômeno. Mesmo assim, um modelo matemático retrata, de forma simplificada, aspectos da situação em estudo (BIEMBENGUT; HEIN, 2014).

A modelagem matemática é um processo que requer a criação de um modelo. Nesse contexto, o modelador não apenas precisa ter conhecimento em matemática, mas também uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto e determinar qual conteúdo matemático se adapta melhor. Além disso, é importante ter um senso lúdico para explorar as variáveis envolvidas de forma adequada. Dessa maneira, o processo de modelagem matemática envolve tanto habilidades técnicas quanto habilidades interpretativas e criativas.

“A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático se restringe a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Quanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática” (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.12).

Segundo Biembengut (2014), por meio da modelagem matemática espera-se: incentivar a pesquisa; promover a habilidade de formular e resolver problemas; lidar com tema de interesse; aplicar o conteúdo matemático; desenvolver a criatividade; enfatizar a importância da Matemática na formação do aluno.

A modelagem matemática, é uma arte que ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam como suporte para outras aplicações. Atualmente usada em toda ciência, tem contribuído para a evolução do conhecimento humano.

3 AUTOVALOR E AUTOVETOR

Os autovalores e autovetores possuem importância devido às suas características peculiares. A ideia subjacente teve origem no estudo do movimento rotacional e posteriormente foi aplicada na classificação de diferentes tipos de superfícies, além de descrever soluções de equações diferenciais específicas. No início do século XX, essa ideia foi estendida para matrizes e transformações matriciais, e atualmente possui aplicações em diversas áreas, tais como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo de calor, dinâmica populacional, mecânica quântica e até mesmo economia (ANTON, Howard; RORRES, Chris, 2012, p.295).

Dado um espaço vetorial V , um vetor não nulo \vec{v} em V é chamado de autovetor de uma transformação linear T se ele permanecer na mesma direção, apenas mudando de tamanho, quando aplicamos T a ele. Em outras palavras, se existe um número escalar λ tal que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, então \vec{v} é um autovetor de T e λ é o autovalor correspondente a \vec{v} .

T é uma transformação linear que mapeia vetores em V para outros vetores em V . O autovalor λ é um número escalar que indica o fator pelo qual o autovetor é esticado ou comprimido pela transformação. Em termos geométricos, o autovetor é um vetor que não muda de direção quando passa pela transformação linear T , apenas seu comprimento é alterado.

Pode-se expressar a relação entre T , λ e \vec{v} através da equação matricial: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, onde A é a matriz associada à transformação linear T . A matriz A é chamada de matriz de transformação ou matriz de representação de T . Os autovetores são importantes porque fornecem uma base para o espaço vetorial V que é preservada pela transformação linear T .

Um autovalor é o valor escalar λ que satisfaz a equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Em outras palavras, é o valor pelo qual um autovetor é esticado ou comprimido pela transformação linear T representada pela matriz A . A equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pode ser reescrita como $(A\vec{v} - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, onde I é a matriz identidade. Essa equação é chamada de equação característica de A e é fundamental para encontrar os autovalores.

Resolver a equação característica envolve encontrar os valores de λ que tornam a matriz $(A - \lambda I)$ singular, ou seja, com determinante igual a zero. A partir disso, obtêm-se os autovalores. Após encontrar os autovalores, pode-se resolver a equação $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ para encontrar os autovetores correspondentes, lembrando que os autovetores não nulos são vetores que satisfazem a equação.

DEFINIÇÃO 1: Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \vec{v} em \mathbb{R}^n é denominado **autovetor** de A (ou operador matricial T_A) se \vec{v} for um múltiplo escalar de $A\vec{v}$, isto é,

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

com algum escalar λ . O escalar λ , denominado **autovalor** de A (ou de T_A), e diz-se que \vec{v} é um **autovetor associado a λ** .

Deve-se impor a exigência de que o autovetor deverá ser não nulo para evitar o caso irrelevante $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$, que vale para quaisquer A e λ , em que $\vec{0}$ é a matriz

nula, então,

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é importante observar que para encontrar os autovalores de A , observe que a equação $Av^{\vec{}} = \lambda v^{\vec{}}$ pode ser reescrita como $Av^{\vec{}} = \lambda I v^{\vec{}}$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n , então,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$Av^{\vec{}} = \lambda I v^{\vec{}} \iff (\lambda I - A) v^{\vec{}} = 0$$

Ressaltando que, para λ ser um autovalor de A , essa equação deve possuir alguma solução \vec{v} não nula. Entretanto, isso ocorre se, e somente se, a matriz de coeficientes $\lambda I - A$ tem determinante nulo. Sendo assim, têm-se:

TEOREMA 1: Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Essa equação é chamada de **equação característica** ou de **polinômio característico** de A .

DEFINIÇÃO 2: Definimos como multiplicidade algébrica do autovalor λ como sendo o número de vezes que λ aparece como raiz do polinômio característico $p(\lambda)$. E a multiplicidade geométrica de λ como sendo a dimensão do subespaço vetorial S_λ .

A multiplicidade geométrica é um conceito importante na teoria de autovalores e autovetores de matrizes. Ela se refere à dimensão do espaço vetorial que é gerado pelos autovetores correspondentes a um determinado autovalor. Em outras palavras, a multiplicidade geométrica indica quantos autovetores linearmente independentes estão associados a um autovalor específico.

Passos para encontrar a multiplicidade geométrica de um autovalor:

- **Calcule os Autovalores:** Primeiro, encontre todos os autovalores da matriz para a qual você deseja determinar a multiplicidade geométrica. Isso pode ser feito resolvendo a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, onde A é a matriz, λ é o autovalor e I é a matriz identidade.

- **Para cada Autovalor encontrado:**
 - **Calcule os Autovetores:** Encontre os autovetores correspondentes a cada autovalor. Isso pode ser feito resolvendo o sistema de equações $(A - \lambda I)v = 0$, onde v é o autovetor e λ é o autovalor.
 - **Verifique Linearmente Independentes:** Verifique se os autovetores correspondentes ao mesmo autovalor são linearmente independentes. Você pode fazer isso calculando o determinante da matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes. Se o determinante for diferente de zero, os autovetores são linearmente independentes.
 - **Contagem de Autovetores:** A multiplicidade geométrica de um autovalor é o número de autovetores linearmente independentes associados a ele. Contagem quantos autovetores são linearmente independentes para cada autovalor encontrado.

É importante notar que a multiplicidade geométrica pode ser menor ou igual à multiplicidade algébrica, que é o número de vezes que um autovalor é repetido na lista de autovalores. A multiplicidade geométrica é fundamental na diagonalização de matrizes e na compreensão da estrutura dos autovetores correspondentes a cada autovalor, o que desempenha um papel crucial na álgebra linear e na teoria de matrizes.

A multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica são dois conceitos importantes relacionados a autovalores em álgebra linear. A diferença entre eles é:

- **Multiplicidade Algébrica:**

- A multiplicidade algébrica de um autovalor é o número de vezes que esse autovalor é repetido na lista de autovalores de uma matriz.
- Ela reflete a raiz da equação característica da matriz.
- É o número de soluções da equação $\det(A - \lambda I) = 0$ para um determinado autovalor λ .

- **Multiplicidade Geométrica:**

- A multiplicidade geométrica de um autovalor é o número de autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor.
- Ela reflete a dimensão do espaço vetorial gerado pelos autovetores correspondentes a um autovalor específico.
- É o número de vetores linearmente independentes que podem ser encontrados como soluções do sistema $(A - \lambda I)v = 0$ para um determinado autovalor λ .

EXEMPLO 1: Encontre os autovalores de uma matriz $A_{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução: Para encontrar os autovalores, deve-se calcular o polinômio característico:

$$\det [(A - \lambda I)] = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\square \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 0 \cdot 1 = (2 - \lambda)^2 = 0$$

Portanto, os autovalores de A , igualando $\det [(A - \lambda I)]$ a zero, tem-se que o autovalor λ é igual a 2. Nesse caso, o autovalor $\lambda = 2$ tem uma multiplicidade algébrica de 2, pois ele é uma raiz dupla do polinômio característico. Agora, para encontrar a multiplicidade geométrica, precisa-se determinar quantos autovetores linearmente estão associados a $\lambda = 2$.

Já a definição de autovetores $v \rightarrow$ corresponde aos autovalores de λ , onde:

$$Av \rightarrow = \lambda v \rightarrow \quad \square \quad Av \rightarrow - \lambda v \rightarrow = 0 \quad \square \quad (A - I\lambda)v \rightarrow = 0, \text{ em que } I_n \text{ é a matriz identidade.}$$

A equação $(A - I\lambda)v \rightarrow = 0$, tem solução $\neq 0$, se e somente se, $\det (A - I\lambda) = 0$

Uma observação importante é que a “solução $\neq 0$ ” significa que a equação possui autovetores não triviais (diferentes de zero), e isso ocorre quando o determinante da matriz $(A - I\lambda)$ é igual a zero, indicando que existem autovetores associados ao autovalor λ .

Calculando os autovetores, do exemplo anterior, obtém-se:

\square Para $\lambda = 2$

$$(A - I\lambda)\vec{v} = 0 \Rightarrow (A - 2I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\square \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se que resultou em uma equação única ($v_2 = 0$) e, portanto, apenas um autovetor linearmente independente associado a $\lambda = 2$, então, como a multiplicidade geométrica de um autovalor é o número de autovetores linearmente independente associados a esse autovalor, para $\lambda = 2$ multiplicidade geométrica é 1, enquanto a multiplicidade algébrica é 2.

A seguir, um exemplo de como calcular a multiplicidade algébrica e geométrica de uma matriz.

EXEMPLO 2: Calcule a multiplicidade algébrica e geométrica da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Primeiro, deve-se encontrar o autovalor e autovetor. Para isso, é preciso calcular o polinômio característico.

$$\det [(B - \lambda I)] = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\square \det (B - \lambda I) = (3 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - 0 \cdot 0 \square$$

$$(3 - \lambda)^2 = 0 \square \lambda = 3$$

Resolvendo essa equação, encontra-se um autovalor repetido, isto é, o autovalor $\lambda = 3$ tem uma multiplicidade algébrica de 2, pois ele é uma raiz dupla de polinômio característico.

Para encontrar a multiplicidade geométrica, é necessário determinar quantos autovetores linearmente independentes estão associados a $\lambda = 3$, então, para $\lambda = 3$, vem:

$$(B - \lambda I)\vec{v} = 0 \Rightarrow (B - 3I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \square$$

$$\square \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, tem-se um sistema de equações homogêneas em que ambas as equações são idênticas e não fornecem informações adicionais. Isso acontece, porque a matriz B é uma matriz diagonal e não possui impacto, mas influencia nos autovetores. Nesse caso, para $\lambda = 3$, tem-se infinitos autovetores associados, o que significa que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ é infinita, isso acontece quando o autovalor é uma raiz repetida do polinômio característico e não há restrições adicionais sobre os autovetores.

EXEMPLO 3: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 4x)$, encontre os autovalores, autovetores e multiplicidade geométrica de cada autovalor.

Resolução: Primeiro, é preciso encontrar os autovalores da transformação linear $T(x, y) = (y, 4x)$, isto é, encontrar às soluções da equação característica:

$$T(x, y) - \lambda(x, y) = 0 \Rightarrow (y, 4x) - \lambda(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\square \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = -2$$

Para encontrar os autovetores correspondentes a cada autovalor, vem:

- Para $\lambda_1 = 2$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \square y = 2x$$

Portanto, o autovetor que corresponde a $\lambda_1 = 2$ é qualquer vetor da forma $\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$, onde x é um número real não nulo.

- Para $\lambda_2 = -2$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + 2x = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$$

Portanto, o autovetor correspondente a $\lambda_2 = -2$ é qualquer vetor da forma $\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$, onde x é um número real não nulo.

Para calcular a multiplicidade geométrica de um autovalor, é preciso lembrar que é o número de autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. Assim, para $\lambda_1 = 2$, a multiplicidade geométrica é 1, pois há apenas 1 autovetor linearmente independente correspondente ao autovalor. Para $\lambda_2 = -2$ é o mesmo caso anterior, sua multiplicidade geométrica é 1.

3.1 POTÊNCIAS DE UMA MATRIZ

Quando se obtém os autovalores e autovetores de uma matriz A simples, se encontra também autovetores de qualquer potência inteira e positiva desta mesma matriz, como por exemplo, se λ for um autovalor de A e \vec{v} for um autovetor, então

$$A^2 \cdot \vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}.$$

Assim, isso mostra que λ^2 é um autovalor de A^2 e que \vec{v} é um autovetor associado.

TEOREMA 2: Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \vec{v} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \vec{v} é um autovetor associado.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 4: Os autovalores e autovetores de uma matriz são respectivamente $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, autovalores de A cujos autovetores correspondentes

são $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então pelo teorema 2, tem-se: $\lambda = 2^7 = 128$ e $\lambda = 1^7 = 1$ são autovalores de A^7 . Os autovetores de A também são autovetores de A^7 associados a $\lambda = 2^7 = 128$ e $\lambda = 1^7 = 1$.

3.2 AUTOVALORES E INVERTIBILIDADE

TEOREMA 3: Uma matriz $A_{n \times n}$ é invertível se, e somente se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

De acordo com Howard Anton e Chris Rorres em seu livro Álgebra Linear com Aplicação conclui-se algumas afirmações equivalentes:

TEOREMA 4: Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) A é invertível
- (b) $A\vec{v} = 0$ tem somente solução trivial
- (c) $\det(A) \neq 0$
- (d) $\lambda = 0$ não é um autovalor de A

A seguir serão apresentadas as aplicações em que são utilizados os conceitos anteriores.

4 APLICAÇÕES

Anteriormente foram explorados os fundamentos dos autovalores e autovetores, essenciais em Álgebra Linear, para mostrar como esses conceitos desempenham um papel importante para a tomada de decisões, na resolução de problemas complexos e na análise de sistemas dinâmicos ao fornecer ferramentas poderosas para a compreensão e solução de desafios complexos, serão abordadas as seguintes aplicações práticas:

- Cadeias de Markov representam um tipo específico de processo estocástico que utiliza distribuições de probabilidade. Esse método permite a previsão dos estados futuros de uma situação, desde que o estado atual seja conhecido, uma vez que isso depende exclusivamente dele e não da sequência anterior.
- No contexto do crescimento populacional, este processo envolve o aumento e a diminuição da população, com apenas três possibilidades em cada momento: nascimento (adição de um elemento), morte (redução de um elemento) ou nenhuma mudança. Importante notar que a probabilidade de cada evento não está relacionada ao tamanho atual da população.
- O PageRank é um algoritmo que avalia a importância de páginas da web com base em sua relevância e conexões.
- E nos Hubs logísticos, é utilizado o algoritmo de Roteirização de Veículos, o qual funciona na medida em que busca otimizar a eficiência das rotas de transporte em diferentes tipos de setores, tais como, o rodoviário, o hidroviário e o ferroviário. O destaque será dado aos aeroportos Hub, em que se destacam as principais características que um aeroporto deve possuir para ser considerado um Hub. Isso enfatiza a importância de um componente sobre outro na instalação do sistema, de acordo com a visão de especialistas.

4.1 CADEIAS DE MARKOV

As Cadeias de Markov são um tipo de processo estocástico em que as distribuições de probabilidade para o desenvolvimento futuro dependem exclusivamente do estado presente, sem levar em consideração

o caminho percorrido até aquele ponto. Essas cadeias são sistemas de transições de estados probabilísticas que dependem apenas do estado atual e suas posições são representadas por vetores probabilísticos e podem variar no tempo de forma discreta ou contínua.

De acordo com Bremond (1998), as Cadeias de Markov surgiram a partir dos estudos do matemático russo Andrei A. Markov (1856-1922), pioneiro na teoria dos processos estocásticos. Ele realizou diversas pesquisas na teoria da probabilidade, chegando a provar o Teorema Central do Limite. Markov analisou a sequência de vogais e consoantes em um poema de Eugene Onegin (1883) e observou empiricamente que uma vogal era seguida por uma consoante em 87% das vezes, enquanto uma consoante era seguida por uma vogal em 66% das vezes. Na época, ele não imaginava as várias outras aplicações que seu trabalho teria.

A finalidade das Cadeias de Markov é prever um estado futuro, levando em consideração apenas o estado atual. Esse conceito é especialmente útil em processos estocásticos. A modelagem matemática das Cadeias de Markov permitiu uma melhor compreensão de fenômenos científicos e sociais em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, um engenheiro de computação pode utilizar esse conceito para construir um algoritmo de busca que classifica páginas da internet com base em sua relevância para a web. Um sociólogo pode usá-lo para entender como memes se espalham na sociedade e as características culturais associadas a eles. Um geneticista pode aplicá-lo na construção do mapa genético de uma espécie, enquanto um meteorologista pode utilizá-lo para prever cenários climáticos em uma determinada região. Até mesmo um biólogo pode estudar o comportamento futuro da população de uma espécie marinha sujeita à pesca industrial.

Além disso, as Cadeias de Markov são uma abordagem eficiente e objetiva para extrair padrões de sinais temporais (BRÉMAUD, 1999 P.53-56).

Para compreender o conceito de Cadeias de Markov, é importante discutir inicialmente o que é um processo estocástico.

4.1.1 O PROCESSO ESTOCÁSTICO

Os processos markovianos são formalmente modelados por meio dos modelos de Markov, que são sistemas de transições de estados em que os estados são representados por vetores probabilísticos e podem variar no tempo de forma discreta ou contínua. As transições entre estados são probabilísticas e dependem apenas do estado corrente. Se o espaço de estados for discreto (enumerável), o modelo de Markov é denominado Cadeias de Markov. As propriedades desses modelos são estudadas em termos das propriedades das matrizes de transições de estados que são utilizadas em sua descrição.

Um processo estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias $X = \{X(t): t \in F\}$, em que F é o espaço de parâmetros. Se F for um intervalo contínuo $[0, \infty)$, o processo é considerado com parâmetro de tempo contínuo, enquanto se F for um conjunto discreto $\{0, 1, 2, \dots\}$, terá parâmetro de tempo discreto.

No processo X , assume-se que todas as variáveis aleatórias estão definidas sobre o mesmo espaço amostral, cujo conjunto de valores possíveis denominado espaço de estados do processo, é representado por E . O processo estocástico é considerado discreto ou contínuo, se E for conjunto discreto ou contínuo. Por exemplo, considere o processo estocástico $X = \{X(t): t \geq 0\}$, em que $X(t)$ indica o preço de uma ação no instante t . Nesse caso, o espaço de parâmetros é $F = T = [0, \infty)$ e o espaço de estados é $E = \{x: x > 0\}$.

Um processo estocástico possui a propriedade de Markov se, dado o valor de $X(t)$, as distribuições de $X(s)$ para $s > t$ não dependem dos valores de $X(u)$ para $u < t$. Isso significa que o comportamento futuro do processo não depende do passado, desde que o estado presente do processo seja conhecido.

4.1.2 CLASSIFICAÇÃO DAS CADEIAS DE MARKOV

A classificação dos estados em uma cadeia de Markov divide-os em estados transitórios e recorrentes com base na probabilidade do processo retornar a um estado específico a partir desse estado inicial.

Um estado i é considerado recorrente se, partindo desse estado i , o processo retornar ao estado i com probabilidade igual a 1, o que é representado pela probabilidade de retorno f_{ii} . Por outro lado, os estados transitórios, também conhecidos como "não recorrentes", são aqueles em que há uma probabilidade positiva de que o processo não retorne a esse estado.

Em uma cadeia de Markov, é possível ter uma coexistência de estados recorrentes e transitórios. A matriz de transição é utilizada para representar as probabilidades de transição entre os estados.

4.1.3 MATRIZ DE TRANSIÇÃO

A matriz de transição é uma representação das probabilidades de transição entre os estados de uma cadeia de Markov, a qual descreve como a probabilidade de o sistema transitar de um estado para outro evolui ao longo do tempo.

Além disso, é geralmente denotada por P e possui dimensões $k \times k$, onde k é o número de estados na cadeia de Markov. Cada elemento da matriz, P_{ij} , representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j .

São fundamentais para entender o comportamento da cadeia de Markov, as seguintes propriedades da matriz de transição:

- **Probabilidade:** Cada elemento é um número real não negativo e a soma dos elementos em cada coluna da matriz é igual 1, isto é, a probabilidade total de transição a partir de um estado deve ser igual a 1, pois o sistema deve estar em algum estado após a transição.
- **Regularidade:** Pode ser classificada como regular se alguma potência positiva da matriz tiver todos os elementos positivos. Isso implica que, ao longo do tempo, todas as transições entre os estados têm uma probabilidade positiva.
- **Vetor Estado:** É um vetor coluna que representa a distribuição de probabilidade dos estados em uma determinada observação da cadeia de Markov.

A matriz de transição desempenha um papel central na análise e modelagem das cadeias de Markov, pois permite estudar a evolução probabilística do sistema ao longo do tempo, prever as probabilidades de transição futuras e determinar a distribuição de probabilidade de longo prazo dos estados.

4.1.4 VETOR DE ESTADO

O vetor de estado em uma cadeia de Markov é um vetor coluna que descreve a distribuição de probabilidade dos estados da cadeia em um determinado momento, em que cada elemento do vetor de estado representa a probabilidade de o sistema estar em um estado específico.

Formalmente, se a cadeia de Markov possui k estados, o vetor de estado é um vetor coluna de tamanho k , denotado por x , em que cada elemento $x(i)$ representa a probabilidade do sistema estar no estado i . A soma de todos os elementos do vetor de estado é igual a 1, pois a probabilidade total deve ser igual a 1. O vetor de estado inicial, denotado por $x(0)$, descreve a distribuição de probabilidade dos estados no momento inicial da cadeia de Markov, representando a probabilidade de o sistema começar em cada estado.

A evolução do vetor de estado ao longo do tempo é determinada pela matriz de transição, P , da cadeia de Markov. O teorema da matriz de transição estabelece que o vetor de estado em uma observação subsequente, $x(n)$, pode ser obtido multiplicando o vetor de estado anterior, $x(n - 1)$, pela matriz de transição P : $x(n) = P \cdot (x(n - 1))$.

Essa multiplicação reflete a probabilidade de transição dos estados de acordo com as probabilidades estabelecidas pela matriz de transição. Cada elemento do vetor de estado resultante representa a probabilidade atualizada de o sistema estar em um estado específico na próxima observação.

O vetor de estado é fundamental para a análise das cadeias de Markov, pois fornece informações sobre a distribuição de probabilidade dos estados em diferentes momentos, além de poder ser usado para prever a evolução futura da cadeia, calcular probabilidades de eventos específicos e determinar o estado de equilíbrio de longo prazo da cadeia de Markov.

4.1.5 REGULARIDADE DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO

A regularidade da matriz de transição é uma propriedade importante das cadeias de Markov. Uma matriz de transição é considerada regular se uma potência positiva dessa matriz tiver todas as suas entradas positivas.

Em outras palavras, se a matriz de transição P de uma cadeia de Markov for regular, isso significa que, após um número suficientemente grande de transições, existe uma probabilidade positiva de transitar entre quaisquer dois estados da cadeia.

A regularidade da matriz de transição está diretamente relacionada à questão da acessibilidade em uma cadeia de Markov. Um estado j é acessível a partir de um estado i se existir uma sequência de transições possíveis que leve do estado i ao estado j em um número finito de passos. Se todos os estados em uma cadeia de Markov são acessíveis uns aos outros, então a matriz de transição é regular.

Uma consequência importante da regularidade é que, para uma cadeia de Markov regular, existe um número n tal que todas as entradas da matriz de transição elevadas à potência n sejam estritamente positivas. Isso implica que, à medida que o número de transições aumenta, a probabilidade de estar em qualquer estado específico se torna mais equilibrada e menos dependente do estado inicial.

Além disso, a regularidade da matriz de transição também está relacionada à existência de um vetor estado fixo. Se a matriz de transição é regular, então a cadeia de Markov possui um vetor de probabilidade fixo chamado vetor de equilíbrio ou distribuição estacionária. Esse vetor descreve a distribuição de probabilidade dos estados da cadeia após um número infinito de transições.

O vetor de equilíbrio é encontrado resolvendo-se o sistema de equações lineares em que este é multiplicado pela matriz de transição resulta no próprio vetor de equilíbrio.

Em resumo, a regularidade da matriz de transição em uma cadeia de Markov implica a acessibilidade entre todos os estados da cadeia e a existência de um vetor estado fixo torna a análise e previsão do comportamento da cadeia mais estável e confiável.

4.1.6 APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NAS CADEIAS DE MARKOV

Aplicação 1: Passo do bêbado I

Uma aplicação clássica das Cadeias de Markov é conhecida como “O Problema do Bêbado”.

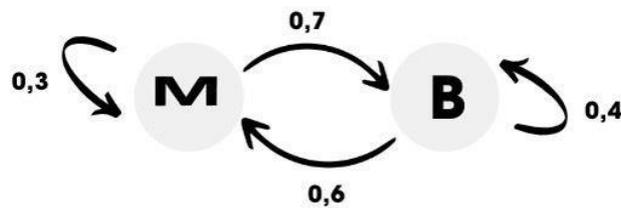
No primeiro caso, suponha que um bêbado dentro de um bar, gosta de se movimentar entre balcão (B) e as mesas (M). Nesse caso, considera-se uma cadeia pequena com apenas duas áreas: o balcão (B) e as mesas (M). As probabilidades de transição são:

- Se o bêbado estiver no balcão, ele tem 40% de chance de permanecer no balcão e 60% de chance de ir para as mesas.
- Se o bêbado estiver nas mesas, ele tem 30% de chance de permanecer nas mesas e 70% de chance de ir para o balcão.

Com isso, é possível determinar qual a matriz de transição P para essa cadeia, qual a probabilidade de o bêbado estar no balcão após um longo período e se existe uma distribuição estacionária para esse sistema e se sim, qual seria.

Resolução: A partir dessas informações consegue-se montar o seguinte grafo:

Figura 2 – Grafo Aplicação 1



Fonte: autoria própria.

A matriz de transição é

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a probabilidade de o bêbado estar no balcão após um longo período, pode-se calcular a distribuição estacionária diretamente. Denominando a probabilidade de estar no balcão de p e de $(1 - p)$ a probabilidade de estar nas mesas, as equações de balanceamento são:

Resolução: Probabilidade de estar no balcão

$$p = 0,4p + 0,7(1 - p) \Rightarrow p = 0,7 - 0,3p \Rightarrow 1,3p = 0,7 \Rightarrow p \cong 0,538$$

Portanto, a probabilidade de o bêbado estar no balcão após um longo período é de aproximadamente 0,538.

Resolução: Probabilidade de estar nas mesas:

$$1 - p = 1 - 0,538 \Rightarrow 1 - p \cong 0,462$$

A distribuição estacionária é a distribuição de probabilidade de longo prazo. Neste caso, tem-se $p \cong 0,538$ (probabilidade de estar no balcão) e $1 - p \cong 0,462$ (probabilidade de estar nas mesas). Portanto, a distribuição estacionária é

$$P = [0,538 \quad 0,462].$$

Aplicação 2: Passo do bêbado II

No segundo caso, suponha que o bêbado dentro de um bar, gosta de se movimentar entre os diferentes lugares. O bar tem três áreas: o balcão (B), as mesas (M) e a pista de dança (P). O bêbado se move aleatoriamente de um lugar para o outro a cada minuto. As probabilidades de movimento são as seguintes:

- Se o bêbado estiver no balcão, há 40% de chance de ficar no balcão, 40% de chance de ir para as mesas e 20% de chance de ir para a pista de dança.
- Se o bêbado estiver nas mesas, há 30% de chance de ficar nas mesas, 30% de chance de ir para o balcão e 40% de chance de ir para a pista de dança.
- Se o bêbado estiver na pista de dança, há 50% de chance de ficar na pista de dança, 30% de chance de ir para as mesas e 20% de chance de ir para o balcão.

Com isso, é possível determinar qual a matriz de transição P para essa cadeia, qual a probabilidade de o bêbado estar no balcão, nas mesas e na pista de dança após um longo período e se existe uma distribuição estacionária para esse sistema e se sim, qual seria.

Resolução: A matriz de transição é

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a probabilidade de o bêbado estar em cada área após um longo período, precisa-se encontrar a distribuição estacionária. Pode-se fazer isso encontrando o autovetor associado ao autovalor 1 da matriz de transição de várias formas:

- Resolver esse sistema de equações lineares por meio da álgebra linear ou software computacional, como o NumPy em Python. As probabilidades no vetor v^{\rightarrow} representam a distribuição estacionária desejada.

Lembre-se de que nem todas as Cadeias de Markov têm uma distribuição estacionária. Para que ela exista, a cadeia deve ser aperiódica e irredutível. A aperiodicidade significa que é possível alcançar um estado a partir dele mesmo em um número finito de passos, e a irredutibilidade significa que é possível chegar a qualquer estado a partir de qualquer outro estado da cadeia.

Para resolver o Sistema de Equações Lineares em Python, deve-se seguir alguns passos:

- Importar a biblioteca NumPy.
- Montar o sistema de equações na forma $v^{\rightarrow}P = v^{\rightarrow}$. Transforme-o na forma $v^{\rightarrow}(P - I) = 0$, onde I é a matriz identidade.
- Resolver o sistema de equações usando um método apropriado. No exemplo, usou-se o método de álgebra linear `numpy.linalg.solve`.

Neste exemplo, a distribuição estacionária é encontrada e impressa $v^{\rightarrow} = [0,35 \ 0,35 \ 0,3]$. O autovetor $v^{\rightarrow} = [0,35 \ 0,35 \ 0,3]$, indica que, a longo prazo, o bêbado tem 35% de chance de estar no balcão, 35% de chance de estar nas mesas e 30% de chance de estar na pista de dança. Neste caso, ocorre uma distribuição estacionária $[0,35 \ 0,35 \ 0,3]$, que representa as probabilidades de o bêbado estar em cada área após um longo período. Portanto, a longo prazo, o bêbado provavelmente ficará igualmente distribuído entre o balcão e as mesas, com uma probabilidade ligeiramente menor de estar na pista de dança. Isso é o que se espera após muitos minutos de movimento aleatório no bar.

Aplicação 3: Crescimento Populacional

No primeiro caso, um biólogo ao estudar o crescimento populacional de duas espécies de animais, A e B, em um ambiente isolado, descobriu que a taxa de crescimento anual de cada espécie foi:

- A população de animais da espécie A um ano depois foi 1,5 vezes a população atual de A.
- A população de animais da espécie B um ano depois foi 2 vezes a população atual de B.

Como as populações de ambas as espécies evoluirão ao longo do tempo e em quanto tempo atingirão os estados estáveis?

Resolução: Para resolver este problema usando autovalores e autovetores, pode-se definir um sistema de equações que descreve o crescimento populacional

$$A_{n+1} = 1,5A_n$$

- $B_{n+1} = 2B_n$

Essas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$M = \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

A matriz M representa a taxa de crescimento de cada espécie. Agora, pode-se usar autovalores e autovetores para entender como o sistema evoluirá a longo prazo.

Para encontrar os autovalores (λ) e autovetores (v^{\rightarrow}), resolve-se a equação $Mv^{\rightarrow} = \lambda v^{\rightarrow}$.

- Para encontrar os autovalores, resolve-se a equação característica:

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1,5 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Isso leva a duas soluções, sendo $\lambda_1 = 1,5$ (autovalor associado a A) e $\lambda_2 = 2$ (autovalor associado a B).

Para cada autovalor, encontra-se o autovetor associado resolvendo a equação:

$$(M - \lambda I) \cdot v^{\rightarrow} = 0$$

Para $\lambda_1 = 1,5$, tem-se $\Rightarrow E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$. Isso nos leva ao autovetor, então, $v^{\rightarrow}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 2$, tem-se $\Rightarrow E = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$. Isso nos leva ao autovetor, então, $v^{\rightarrow}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Os autovetores nos dizem como as populações de A e B evoluem ao longo do tempo:

- Para $\lambda_1 = 1,5$, a população de A aumenta com o tempo, enquanto a população de B permanece constante.
- Para $\lambda_2 = 2$, a população de B aumenta com o tempo, enquanto a população de A permanece constante.

No segundo caso, o mesmo biólogo ao estudar o crescimento populacional de duas outras espécies de animais, A e B, em um ambiente isolado descobriu que:

- A população de animais da espécie A no próximo ano é 1,2 vezes a população atual de A mais 0,5 vezes a população atual de B.
- A população de animais da espécie B no próximo ano é 0,8 vezes a população atual de A mais 1,4 vezes a população atual de B.

Como as populações de ambas as espécies evoluirão ao longo do tempo? Encontre os estados estáveis.

Resolução: para resolver esse problema usando autovalores e autovetores, deve-se

$$A_{n+1} = 1,2A_n + 0,5B_n$$

$$B_{n+1} = 0,8A_n + 1,4B_n$$

Esse sistema de equações, pode ser escrito na forma matricial

$$M = \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,5 \\ 0,8 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

A matriz M representa a taxa de crescimento de cada espécie. Agora, pode-se usar autovalores e autovetores para entender como o sistema evoluirá a longo prazo.

- Para encontrar os autovalores (λ) e autovetores (v^{\rightarrow}) resolve-se a equação $M \cdot v^{\rightarrow} = \lambda \cdot v^{\rightarrow}$.

- Para encontrar os autovalores, resolve-se a equação característica

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1,2 - \lambda & 0,5 \\ 0,8 & 1,4 - \lambda \end{vmatrix}$$

Isso nos leva à duas soluções $\lambda_1 \cong 0,585$ (autovalor associado a A) e $\lambda_2 \cong 2,015$ (autovalor associado a B).

Para encontrar o autovetor (v^{\rightarrow}) associado cada autovalor, resolve-se as equações.

- Para $\lambda_1 \cong 0,585$ tem-se

$$M = \begin{bmatrix} 0,615 & 0,5 \\ 0,8 & 0,815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cong 0,585 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Com alguns cálculos, chega-se ao autovetor $v^{\rightarrow}_1 \cong \begin{bmatrix} 0,722 \\ 1 \end{bmatrix}$. A componente de autovetor 0,722 é positiva, indica que a população de A tende a aumentar ao longo do tempo. E, a componente de autovetor 1 é positiva, indica que a população de B também aumenta, mas com um peso maior.

- Para $\lambda_2 \cong 2,015$ tem-se

$$M = \begin{bmatrix} -0,015 & 0,5 \\ 0,8 & -0,615 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cong 2,015 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analogamente ao caso anterior, chega-se ao autovetor $v_2 \cong \begin{bmatrix} -0,879 \\ 1 \end{bmatrix}$. A componente de autovetor $-0,879$ é negativa, indicando que a população de A tende a diminuir ao longo do tempo. A componente de autovetor 1 é positiva, indicando que a população de B aumenta.

Portanto, os autovetores indicam como as populações de A e B evoluem ao longo do tempo, enquanto os autovalores indicam as taxas de crescimento ou declínio. Para entender o comportamento a longo prazo, pode-se usar esses autovetores para analisar como as populações de A e B evoluem ao longo do tempo, isto é, se estabilizam ou mudam. Um estado estável é aquele onde ambas as populações são constantes. No entanto, a estabilidade desses estados depende das condições iniciais. Se as condições iniciais estiverem fora desses estados estáveis, as populações de A e B evoluirão conforme indicado pelos autovetores associados aos autovalores.

Pode-se considerar esses problemas de crescimento populacional como aplicações das Cadeias de Markov, embora eles sejam um pouco diferentes em termos de sua formulação tradicional. Aqui está como esses problemas se relacionam às Cadeias de Markov:

Cadeias de Markov tradicionais:

- Nas Cadeias de Markov, modela-se um sistema que muda de estado em estado ao longo do tempo, com probabilidades de transição entre os estados. O sistema evolui de acordo com uma matriz de transição de estados.
- Cada estado tem uma probabilidade associada de transição para outros estados no próximo período.
- O foco principal é encontrar a distribuição de probabilidade em estados ao longo do tempo e determinar estados estáveis ou de equilíbrio.

Problemas de Crescimento Populacional:

- Os problemas de crescimento populacional modelam a evolução das populações de diferentes espécies ao longo do tempo com base em taxas de crescimento e interações entre as espécies.
- Embora a formulação seja ligeiramente diferente das Cadeias de Markov tradicionais, o princípio subjacente de evolução de estados ao longo do tempo ainda está presente.
- Os autovalores e autovetores são usados para entender como as populações se estabilizam ou mudam a longo prazo, assim como as Cadeias de Markov buscam encontrar estados estáveis.

Portanto, esses problemas de crescimento populacional podem ser vistos como uma extensão ou variação das Cadeias de Markov, onde a ênfase está na modelagem do crescimento de populações em vez de estados discretos. Ambos os métodos usam conceitos semelhantes de autovalores, autovetores e estabilidade a longo prazo para analisar a evolução do sistema ao longo do tempo.

4.2 PAGERANK

O algoritmo PageRank, desenvolvido pelos fundadores do Google, utiliza conceitos de álgebra linear, incluindo autovalores e autovetores, para determinar a relevância de páginas da web em uma rede. O PageRank é um algoritmo que atribui uma pontuação para cada página da web com base em sua relevância para um determinado tópico.

O PageRank considera o número de links de entrada (backlinks) que uma página recebe, bem como a relevância das páginas que fornecem esses backlinks. O algoritmo utiliza uma matriz de adjacência para representar as relações entre as páginas da web e calcular a pontuação do PageRank.

Em 1997, dois estudantes de doutorado, Larry Page e Sergey Brin, desenvolveram o algoritmo PageRank com o objetivo de classificar páginas da web nos resultados de busca. A classificação é fundamental para apresentar as páginas mais relevantes primeiro aos usuários, economizando tempo na busca. Para implementar o algoritmo, os estudantes criaram o buscador Google, que se tornou uma das empresas mais lucrativas da história.

PageRank é um algoritmo de análise de links utilizado pelo mecanismo de busca Google para medir a importância de páginas da web. Ele atribui um valor numérico, chamado de pontuação PageRank, a cada página com base no número e qualidade de outras páginas que a linkam.

A ideia básica por trás deste algoritmo é que uma página da web é considerada importante se for linkada por outras páginas importantes. Ele calcula uma pontuação para cada página com base no número de links de entrada e nas pontuações PageRank das páginas que estão linkando. Uma página com uma pontuação mais alta é considerada mais importante e é mais provável que apareça no topo dos resultados de pesquisa.

O algoritmo leva em consideração não apenas o número de links que apontam para uma página, mas também a qualidade e relevância desses links. Por exemplo, um link de um site de alta autoridade como o The New York Times terá mais peso do que um link de um blog de baixa qualidade.

A pontuação PageRank é atualizada continuamente à medida que novas páginas são adicionadas e novos links são criados, e é um dos muitos fatores usados pelo Google para classificar os resultados de pesquisa. No entanto, não é o único fator, e outros fatores como relevância, comportamento do usuário e qualidade do conteúdo também desempenham um papel significativo na determinação das classificações de pesquisa.

O algoritmo tem o objetivo de entender quais páginas são mais relevantes para o usuário e, portanto, devem ter uma pontuação maior. O funcionamento do algoritmo é baseado em três conceitos intuitivos e usados cotidianamente: indicação, confiabilidade e certeza. Com esses conceitos e algumas ferramentas matemáticas, foi possível a criação de um algoritmo que tornasse as buscas na Web mais rápidas e com melhor qualidade.

O primeiro conceito crucial a ser compreendido é o de indicação, que na Web é representado por hyperlinks, mais comumente conhecidos como links. Basicamente, uma página A indica outra página B , se a página A tiver um link apontando para a página B . Por essa razão, é importante que a quantidade de links que uma página recebe influencie sua pontuação. Contudo, é necessário destacar que uma página não pode ter um link para si mesma.

Uma aplicação prática do algoritmo PageRank é em motores de busca, como o Google. O PageRank é utilizado para classificar a relevância das páginas da web em relação a uma determinada consulta de pesquisa.

Suponha que um usuário faça uma consulta de pesquisa sobre "receitas de pizza". O Google irá então analisar todas as páginas da web que contêm informações relacionadas a "receitas de pizza" e classificar essas páginas em ordem de relevância, com as mais relevantes no topo dos resultados da pesquisa.

O algoritmo PageRank é uma das ferramentas que o Google usa para determinar a relevância de uma página. O PageRank atribui uma pontuação a cada página da web com base em sua importância relativa, medindo a quantidade e a qualidade dos links de outras páginas da web que apontam para ela.

Páginas com uma pontuação de PageRank mais alta são consideradas mais relevantes e, portanto, são exibidas em uma posição mais alta nos resultados da pesquisa. Isso significa que as páginas que possuem uma pontuação de PageRank mais alta têm uma maior probabilidade de serem vistas pelos usuários e, conseqüentemente, podem receber mais tráfego de pesquisa.

Vale destacar que essa ideia de indicação já era utilizada na análise de relevância de trabalhos acadêmicos disponibilizados digitalmente na época, conforme mencionado por Page e Brin. Nesse caso, o cálculo da pontuação de um determinado trabalho era determinado pelo número de outros trabalhos acadêmicos que o citavam. No entanto, Page e Brin reconheceram que essa abordagem não poderia ser aplicada exclusivamente às páginas da Web, uma vez que, ao contrário dos trabalhos acadêmicos que passam por revisões de conteúdo realizadas por humanos e possuem um alto grau de qualidade, as páginas da Web crescem sem qualquer supervisão ou compromisso com a qualidade da informação.

Diante disso, o conceito de confiabilidade precisou ser incorporado ao algoritmo, com o objetivo de classificar como relevantes as páginas bem avaliadas por outras páginas consideradas confiáveis. Foi assim que surgiu o conceito de PageRank, que leva em consideração tanto a quantidade de links que uma página recebe quanto a qualidade dos sites que a indicam. Esse algoritmo funciona de forma iterativa, atribuindo pontuações iniciais a todas as páginas e recalculando essas pontuações com base nas pontuações das páginas que as indicam.

Conseqüentemente, as páginas bem avaliadas passam a ter mais peso na pontuação das páginas que elas indicam, aumentando sua relevância na Web. É importante salientar que existem outros algoritmos de classificação de páginas, cada um com suas próprias características e

diferenças, mas o PageRank ainda é amplamente utilizado e considerado um dos mais importantes na análise de relevância de páginas na Web.

4.2.1 ALGORITMO DO PAGERANK

O PageRank é baseado em conceitos matemáticos como autovalores e autovetores. Um autovetor é um vetor que não muda de direção quando multiplicado por uma matriz, enquanto um autovalor é um número que indica quanto esse autovetor é esticado ou encolhido pela multiplicação da matriz.

No caso do PageRank, a matriz em questão é a matriz de adjacência do grafo da web, que mostra as conexões entre as páginas. Cada linha da matriz representa uma página e cada coluna representa um link. Se uma página aponta para outra, o valor correspondente na matriz é 1, e se não, é 0.

O PageRank é então calculado como o principal autovetor da matriz de adjacência, normalizado para ter soma igual a 1. Isso significa que o vetor resultante indica a importância relativa de cada página em relação a todas as outras páginas da web.

A matriz de adjacência pode ser transformada em uma matriz estocástica de probabilidade de transição, onde as colunas da matriz somam 1. Essa matriz de probabilidade de transição pode ser usada para calcular o vetor de PageRank, que contém as pontuações de relevância para cada página da web.

O vetor de PageRank pode ser encontrado através do método da potência, que utiliza o autovalor dominante da matriz de probabilidade de transição e o correspondente autovetor para determinar o vetor de PageRank.

O cálculo do PageRank é iterativo e envolve multiplicar repetidamente a matriz de adjacência pelo vetor atualizado. À medida que o algoritmo converge, a pontuação PageRank de cada página se estabiliza.

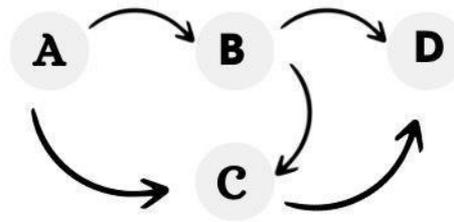
4.2.2 APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NO ALGORITMO PAGERRANK.

Aplicação 4: Páginas da Web

A matriz de autovalor é uma representação matemática do algoritmo PageRank. Sendo uma matriz quadrada em que as linhas representam as páginas da web e as colunas representam as páginas que fazem um link para as páginas de destino. Cada elemento dessa matriz representa a probabilidade de um usuário seguir um link de uma página para outra.

Suponha que temos um pequeno grafo da web com 4 páginas:

Figura 3 – Páginas de web



Fonte: autoria própria

- Página A aponta para a página B e C
- Página B aponta para a página C e D
- Página C aponta para a página D
- Página D não aponta para nenhuma outra página

A matriz de adjacência correspondente seria:

$$\begin{array}{c}
 A \quad B \quad C \quad D \\
 A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Para calcular o PageRank, começamos com um vetor de pontuações inicial, onde todas as páginas têm pontuação igual a 1/4:

$$[0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25]$$

Multiplicamos a matriz de adjacência pelo vetor de pontuações para obter um novo vetor de pontuações:

$$[0,5 \quad 0,5 \quad 0 \quad 0]$$

Normalizamos esse vetor para ter soma igual a 1:

$$[0,5 \quad 0,5 \quad 0 \quad 0] \Rightarrow [0,5 \quad 0,5 \quad 0 \quad 0]/1 \Rightarrow [0,5 \quad 0,5 \quad 0 \quad 0]$$

Esse é o novo vetor de pontuações. Foi repetido o processo de multiplicar a matriz de adjacência pelo vetor de pontuações e normalizá-lo até que ele se estabilize.

No final, obtemos um vetor de pontuações que indica a importância relativa de cada página em relação às outras páginas. No nosso exemplo, o vetor de pontuações estabilizado é:

$$[0,3846 \quad 0,3077 \quad 0,1923 \quad 0,1154]$$

Isso significa que a página A é a mais importante, seguida pela página B, C e D. Esses valores correspondem aos autovalores da matriz de adjacência e ao autovetor associado, que é o vetor PageRank.

As aplicações matemáticas são muito comuns no cotidiano, tanto as mais simplificadas quanto as mais complexas. Com um bom entendimento sobre grafos, matrizes adjacentes, processos estocásticos e seus métodos e a base da matemática matricial, seus autovalores e autovetores, podem ser utilizados para ranquear e classificar. Utilizando o método do mecanismo Page Rank é possível obter a classificação de relevância em diversos casos esses resultados a partir de alguns dados.

4.3 HUBS LOGÍSTICOS

Os Hubs Logísticos são locais determinados pelas empresas, de forma estratégica, para facilitar a redistribuição de mercadorias. Trata-se de um processo bastante versátil e que traz benefícios para todos o transporte em diferentes tipos de setores, como o rodoviário, o hidroviário e o ferroviário.

Na logística de distribuição de cadeias de supermercados e em outros setores, o algoritmo de Roteirização de Veículos (ou Vehicle Routing Algorithm), é um algoritmo comum usado para otimizar o roteamento de pessoas e/ou mercadorias, o qual busca otimizar a eficiência das rotas de transporte com foco em atender a várias localizações de entrega, como lojas de supermercados.

O algoritmo de Roteirização de Veículos, na medida em que busca otimizar a eficiência das rotas de transporte, se compõe basicamente de:

- **Coleta de Dados:** O algoritmo começa coletando informações, como os locais de entrega, as demandas de mercadorias em cada local, as capacidades dos veículos e as restrições de tempo e tráfego.
- **Modelagem do Problema:** Com base nos dados coletados, o problema é modelado em uma estrutura matemática que representa as restrições e objetivos do roteamento. O objetivo principal é minimizar os custos totais, como distância percorrida ou tempo de entrega.
- **Seleção de Rotas:** O algoritmo determina quais rotas os veículos devem seguir para atender a todas as entregas planejadas. Isso envolve a alocação eficiente de veículos a locais de entrega e a determinação da ordem das entregas em cada rota.

- **Otimização das Rotas:** A otimização é realizada para minimizar custos, como distância percorrida, tempo de viagem ou consumo de combustível. Isso pode ser feito usando técnicas como Programação Linear, Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing, entre outros.
- **Gestão em Tempo Real:** À medida que as rotas são executadas, o algoritmo pode ser adaptado em tempo real para lidar com atrasos, mudanças nas demandas ou problemas de tráfego.
- **Relatórios e Análises:** O algoritmo fornece relatórios e análises detalhadas para ajudar na tomada de decisões estratégicas e na identificação de áreas de melhoria no processo de distribuição.

Este algoritmo é fundamental para garantir a eficiência na distribuição de mercadorias em redes de supermercados, minimizando custos operacionais, otimizando o uso de veículos e garantindo entregas pontuais. Há uma crescente aplicação de tecnologias de otimização em logística, como Sistemas de Gerenciamento de Transporte (TMS) e Softwares de Roteirização de Veículos, que incorporam algoritmos avançados para melhorar ainda mais a eficiência nas operações de distribuição.

4.3.1 APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM LOGÍSTICA DE AEROPORTOS HUBS

Aplicação 5: Aeroporto Hub

Os conceitos de autovalor e autovetor também podem ser aplicados em aeroportos Hub. Um aeroporto Hub é um aeroporto que serve como ponto central para rotas de voo, onde ocorre um grande volume de conexões entre voos. Nesse contexto, é importante analisar a conectividade e a importância relativa dos diferentes aeroportos na rede de rotas.

Uma maneira de fazer isso é por meio da análise de redes complexas, onde cada aeroporto é representado como um nó e as rotas entre eles são representadas como arestas. A matriz de adjacência resultante é uma representação matemática dessa rede.

Ao aplicar o conceito de autovalor e autovetor nessa matriz de adjacência, é possível identificar os aeroportos mais importantes dentro da rede Hub. O autovalor dominante da matriz de adjacência é associado ao principal autovetor, que fornece informações sobre a importância relativa dos nós na rede. Dessa forma, os aeroportos com maiores valores de autovetor seriam considerados os aeroportos Hub mais importantes dentro da rede de rotas.

A estatística desempenha um papel importante na sociedade moderna, pois fornece ferramentas para analisar variáveis de diferentes perspectivas, verificar possíveis relações por meio de pesquisas e experimentos e, assim, fornecer um caminho coerente e direto para possíveis decisões.

Essa análise é útil para entender a conectividade da rede, identificar a centralidade dos aeroportos e ajudar na tomada de decisões estratégicas em termos de planejamento de rotas, alocação de recursos e expansão da infraestrutura em aeroportos Hub.

Considere um exemplo de aplicação dos conceitos de autovalor e autovetor em um aeroporto Hub. Suponha que se deseja analisar a rede de rotas aéreas de um determinado país.

Nessa rede, temos vários aeroportos interconectados por rotas de voos. Alguns aeroportos funcionam como Hubs, ou seja, eles são pontos de conexão central para muitos voos que seguem para outros destinos.

Ao aplicar a análise de autovalor e autovetor nessa rede, pode-se identificar os aeroportos Hub mais importantes.

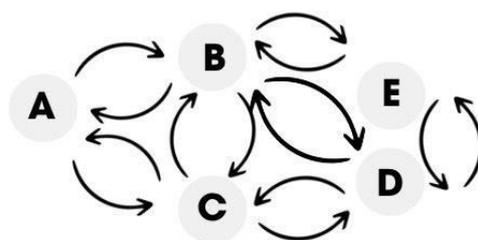
Além disso, os autovetores associados a esses autovalores podem fornecer informações sobre a conectividade e a importância dos aeroportos adjacentes a esses Hubs principais. Por exemplo, os autovetores maiores indicariam quais aeroportos têm mais conexões diretas com os Hubs principais e, portanto, são mais estratégicos em termos de conectividade na rede.

Com essas informações, os operadores do aeroporto e as companhias aéreas podem tomar decisões informadas sobre o planejamento de rotas, horários de voos, alocação de recursos e estratégias de expansão. Eles podem priorizar a melhoria das infraestruturas nos aeroportos Hub principais, otimizar as conexões entre os aeroportos adjacentes a esses Hubs e identificar oportunidades de expansão de rotas para aumentar a eficiência e a conectividade global da rede de rotas aéreas.

Vamos considerar um exemplo numérico de aplicação dos conceitos de autovalor e autovetor em um aeroporto Hub. Suponha que estamos analisando a rede de rotas aéreas em um país fictício com 5 aeroportos, rotulados como A, B, C, D e E.

A matriz de adjacência correspondente, representando as rotas de voos entre os aeroportos, é a seguinte:

Figura 4 – Grafo Aplicação 5



Fonte: autoria própria

Tabela 1 – Matriz de adjacência do grafo.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	0
D	0	1	1	0	1
E	0	1	0	1	0

Fonte: autoria própria

Ou na forma matricial .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, pode-se calcular os autovalores e autovetores associados a essa matriz de adjacência.

O autovalor dominante e seu respectivo autovetor principal nos fornecerão informações sobre os aeroportos Hub mais importantes nessa rede de rotas.

Suponha que, após o cálculo, encontramos o seguinte autovetor principal:

$$v^{\rightarrow} = [0,45 \quad 0,6 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,4]$$

Nesse caso, os valores no autovetor nos indicam a importância relativa dos aeroportos. Portanto, o aeroporto B possui o maior valor (0.6) no autovetor, indicando que é o Hub mais importante nessa rede de rotas. Os aeroportos D e C também possuem valores relativamente altos, sugerindo que eles têm uma importância considerável como Hubs secundários. Por outro lado, os aeroportos A e E possuem os valores mais baixos, indicando uma importância relativamente menor como Hubs.

Com base nesses resultados, os operadores do aeroporto e as companhias aéreas podem direcionar recursos adicionais para melhorar as infraestruturas e conexões em torno do aeroporto B, fortalecer as rotas entre os aeroportos *D* e *C*, e tomar outras medidas estratégicas para otimizar a conectividade e a eficiência da rede de rotas aéreas

Considerando-se um exemplo completo de aplicação numérica dos conceitos de autovalor e autovetor em um aeroporto Hub. Suponha que estamos analisando a rede de rotas aéreas em um país fictício com 6 aeroportos, rotulados como *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.

A matriz de adjacência correspondente, representando as rotas de voos entre os aeroportos, é a seguinte:

Tabela 2 – Matriz de adjacência entre aeroportos.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	1	0
B	1	0	1	0	0	1
C	0	1	0	1	0	1
D	1	0	1	0	1	0
E	1	0	0	1	0	1
F	0	1	1	0	1	0

Fonte: autoria própria.

Ao se calcular os autovalores e autovetores associados a essa matriz de adjacência., encontramos o seguinte autovetor principal:

$$v^{\rightarrow} = (0,408 \quad 0,577 \quad 0,408 \quad 0,500 \quad 0,408 \quad 0,577)$$

Nesse caso, os valores no autovetor nos indicam a importância relativa dos aeroportos. Podemos normalizar o autovetor dividindo cada elemento pela soma total para obter as probabilidades de visitação:

$$P = (0,235 \quad 0,333 \quad 0,235 \quad 0,300 \quad 0,235 \quad 0,300)$$

A partir desses resultados, podemos concluir que o aeroporto B é considerado o Hub mais importante nessa rede de rotas, pois possui a maior probabilidade de visitação. Os aeroportos D e F também têm importância considerável como Hubs secundários. Por outro lado, os aeroportos A, C e E possuem probabilidades de visitação menores, indicando uma importância relativamente menor como Hubs.

Com base nesses resultados, os operadores do aeroporto e as companhias aéreas podem direcionar recursos adicionais para melhorar as infraestruturas e conexões em torno do aeroporto B, fortalecer as rotas entre os aeroportos D e F, e tomar outras medidas estratégicas para otimizar a conectividade e a eficiência da rede de rotas aéreas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, explorou-se o conceito de autovalor e autovetor e suas aplicações nas Cadeias de Markov, Crescimento Populacional, PageRank e na identificação de Hubs Logísticos, uma vez que estes têm se mostrado ferramentas poderosas na álgebra linear e em diversas áreas da ciência e tecnologia.

O algoritmo do PageRank, baseado em princípios de autovalor e autovetor, tem sido importante para indexação e pesquisa na internet ao fornecer resultados de buscas mais relevantes e confiáveis na classificação de páginas da web.

Além disso, a aplicação dessas técnicas na identificação de Hubs Logísticos, por meio da análise dos autovalores e autovetores de uma rede de transporte aéreo, possibilitou a identificação dos principais centros de conexão, na otimização do fluxo de tráfego e melhorar a eficiência do sistema como um todo.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, pode-se perceber a importância e a versatilidade dos autovalores e autovetores como ferramentas fundamentais na resolução de problemas complexos. Sua utilização permite compreender e modelar sistemas dinâmicos e contribuir para avanços significativos na ciência da computação, engenharia, pesquisa operacional, entre outros.

Apesar dos avanços obtidos nestas áreas, há ainda muitos aspectos a serem explorados e aprofundados. A análise de redes complexas, a aplicação em outros domínios e a investigação de métodos numéricos mais eficientes são algumas das direções para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H; DOERING, C. I; e RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- ANTON, Howard; RORRES Chris. **Álgebra Linear: com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2014.
- BRÉMAUD, Pierre. **Markov Chains – Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and queues**. Springer-Verlag. New York - NY - USA. 1999.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2014.
- HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray; tradução de Renate Watanabe. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- LANG, S. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
- Langville, AN e Meyer, CD (2011). **PageRank do Google e muito mais: a ciência das classificações dos mecanismos de pesquisa**. Imprensa da Universidade de Princeton.
- LAY, David J. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro, LTC- Livros Técnico e Científicos, 2007.
- LEON, STEVEN J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.
- LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear: teoria e problemas**. 3. ed. rev.e ampl. Rio de Janeiro: MakronBooks, 1994.
- PAGE, L., Brin, S., MOTWANI, R. e WINOGRAD, T. (1998). **A classificação de citações do PageRank: Trazendo ordem para a Web**. Em Anais da 7ª Conferência Internacional da World Wide Web, páginas 161-172, Brisbane, Austrália.
- STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2007.