

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

aplicada em crescimento populacional, decaimento radioativo e solubilidade de substâncias em solventes

Guilherme Henrique Custódio Rosa
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
guilhermehenriquecustodiorosa@hotmail.com

Lucinda Maria de Fátima R. Coelho
Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar uma abordagem teórica e prática das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com exemplos e aplicações em contextos significativos. Inicialmente, são explorados os fundamentos teóricos das equações diferenciais, incluindo sua classificação em diferentes tipos, com ênfase particular nas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Além disso, o estudo apresenta métodos analíticos e numéricos para a resolução dessas equações, abrangendo conceitos como solução geométrica, aplicação de variáveis separáveis e o problema do valor inicial. O trabalho também enfatiza a importância dos métodos numéricos, com destaque para o Método de Euler e sua versão aprimorada, que permitem a aproximação de soluções de equações diferenciais por meio de computação, resultando em análises mais precisas e expandir as aplicações práticas em uma variedade de campos, incluindo engenharia, ciência da computação, física e biologia. No decorrer do estudo, são apresentados exemplos de aplicações práticas das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, incluindo a modelagem do crescimento populacional, do decaimento radioativo e do estudo da solubilidade de substâncias em solventes, os quais ilustram a relevância e a versatilidade desses conceitos matemáticos na compreensão e na representação de fenômenos complexos em contextos do mundo real. A proposta deste estudo procura contribuir para a compreensão das equações diferenciais de primeira ordem e destacar como esses conceitos matemáticos desempenham um papel fundamental na resolução de problemas práticos em áreas diversas, demonstrando sua importância nas ciências aplicadas.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais. Modelagem Matemática. Aplicações. Método de Euler.

ABSTRACT

This work has as its main objective to present a theoretical and practical approach to first-order ordinary differential equations with examples and applications in significant contexts. Initially, the theoretical fundamentals of differential equations are explored, including their classification into different types, with particular emphasis on first-order ordinary differential equations. Additionally, the study presents analytical and numerical methods for the resolution of these equations, encompassing concepts such as geometric solution, the application of separable variables, and the initial value problem. The work also emphasizes the importance of numerical methods, with a focus on the Euler method and its enhanced version, which enable the approximation of solutions to differential equations through computation, resulting in more precise analyses and expanding practical applications in a variety of fields, including engineering, computer science, physics, and biology. Throughout the study, concrete examples of practical applications of first-order ordinary differential equations are presented, including the modeling of population growth, radioactive decay, and the study of the solubility of substances in solvents, which illustrate the relevance and versatility of these mathematical concepts in understanding and representing complex phenomena in real-world contexts. This research seeks to contribute to the understanding of first-order differential equations and highlight how these mathematical concepts play a fundamental role in solving practical problems in diverse areas, demonstrating their importance in the applied sciences.

Keywords: Differential Equations. Mathematical Modeling. Applications. Euler's Method.

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são uma ferramenta fundamental na modelagem matemática de muitos fenômenos naturais e sociais, descrevem a relação entre a variação de uma ou mais variáveis dependentes e uma ou mais variáveis independentes, são classificadas em diferentes tipos, dependendo do número de variáveis dependentes e do grau das derivadas.

Este trabalho, enfatiza a importância da modelagem matemática, em que são explorados os fundamentos teóricos dessas equações e sua classificação em diferentes tipos, com foco nas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. As equações diferenciais ordinárias são aquelas que envolvem apenas uma variável dependente e sua derivada, enquanto as equações diferenciais de primeira ordem envolvem apenas a primeira derivada da variável dependente.

Serão abordados os métodos de resolução dessas equações, incluindo métodos analíticos e numéricos.

Os métodos numéricos são técnicas que permitem aproximar soluções para equações diferenciais de forma computacional, sem a necessidade de encontrar soluções analíticas. Dentre os métodos mais comuns para resolver essas equações, destacam-se:

- Euler: um dos métodos numéricos mais simples e antigos para resolver equações diferenciais. Ele se baseia na aproximação da derivada no tempo t por uma diferença finita, utilizando o valor conhecido da solução no tempo t anterior, é fácil de implementar, mas é menos preciso do que outros métodos numéricos.
- Runge-Kutta: é mais avançado do que o de Euler, melhora a precisão das soluções numéricas. Utiliza uma combinação de diferenças finitas para aproximar as derivadas da solução, resultando em uma precisão melhorada em comparação com o método de Euler.

- Resolução implícita: é usado para resolver equações diferenciais com soluções que são difíceis de serem aproximadas por métodos explícitos, como o de Euler de Runge-Kutta, o qual se baseia na resolução de equações algébricas para achar a solução numérica. O método de resolução implícita é geralmente mais preciso do que os métodos explícitos, mas é mais difícil de implementar.

Estes são apenas alguns dos métodos numéricos disponíveis para resolver equações diferenciais de primeira ordem, sua escolha depende de vários fatores, incluindo a natureza da equação diferencial, as condições iniciais e a precisão desejada na solução porém, nesse trabalho será abordado apenas o método de Euler e sua variação.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma abordagem educacional que estabelece uma conexão direta entre a disciplina da matemática e a aplicação prática em situações do mundo real. Essa metodologia utiliza problemas concretos e relevantes como base para o aprendizado, afim de estimular o desenvolvimento do pensamento crítico, também promove habilidades essenciais, como trabalho em equipe, comunicação efetiva e tomada de decisões informadas. De acordo com Blum e Leiss (2005), "a modelagem matemática é um processo que envolve a construção, interpretação e avaliação de modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real".

Quando situações físicas envolvem variáveis contínuas evoluindo em relação a outras variáveis contínuas, os modelos matemáticos adequados são aqueles cujas relações entre as variáveis dependentes e independentes são obtidas por meio de hipóteses formuladas a respeito das taxas de variações instantâneas, isto é, se relacionam às equações diferenciais. Quando se tem apenas uma variável independente, o modelo matemático é dado em termos de equações diferenciais ordinárias.

Somente um grupo reduzido de equações diferenciais, nos quais se incluem os modelos mais simples e que dão apenas um delineamento das situações ou fenômenos analisados, admite soluções na forma de uma função analiticamente explícita. O que se busca numa modelagem é estabelecer um ponto de partida com modelos simples, que possam ser modificados e ampliados de acordo com os objetivos. No grupo dos modelos simples encontram-se as equações diferenciais lineares enquanto os modelos mais complexos podem ser "resolvidos" numericamente por meio de determinados procedimentos iterativos.

Segundo, Bassanezzi (2002), quando se conhece bem os modelos clássicos tem-se mais facilidade em modelar situações novas, porque uma única equação variacional (diferencial ou de diferenças) pode servir de modelo para situações de naturezas diversas, mas análogas em termos evolutivos.

Algumas razões pelas quais é importante o estudo das equações diferenciais:

- Modelagem de sistemas dinâmicos: As equações diferenciais são amplamente utilizadas para modelar sistemas dinâmicos, como sistemas mecânicos, elétricos, químicos e biológicos.
- Solução de problemas: A solução de equações diferenciais é uma técnica poderosa para resolver problemas em várias áreas, como física, engenharia e economia.
- Análise de estabilidade: A análise de estabilidade é importante para verificar se um sistema é estável ou instável. As equações diferenciais são amplamente utilizadas para realizar essa análise.
- Predição de comportamentos futuros: As equações diferenciais são usadas para prever o comportamento futuro de sistemas dinâmicos. Por exemplo, elas podem ser usadas para prever a evolução de uma epidemia ou a dinâmica de uma economia.
- Entendimento matemático: O estudo das equações diferenciais é uma parte importante da formação matemática e ajuda a desenvolver habilidades matemáticas valiosas, como resolução de problemas, pensamento lógico e resolução de equações complexas.

A denominação de equação diferencial já sugere o objeto de estudo, ou seja, equações que envolvem derivadas. Primeiramente, qual é a diferença entre uma equação e uma equação diferencial?

Uma equação é uma expressão matemática que estabelece uma igualdade entre duas expressões algébricas, envolvendo uma ou mais incógnitas. Essas incógnitas representam valores desconhecidos que precisam ser encontrados para tornar a igualdade verdadeira. Enquanto que uma equação diferencial é um tipo específico de equação que envolve derivadas. Pode-se relacionar uma equação diferencial com uma equação algébrica, por meio de uma analogia para compreender as diferenças e semelhanças entre elas, as quais são:

- Natureza das incógnitas: em uma equação comum, as incógnitas são números reais ou complexos. Por exemplo, em $2x + 3 = 7$, x é uma incógnita que representa um número real.

Em uma equação diferencial, as incógnitas são funções. Por exemplo, em $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$ onde y é uma incógnita que representa uma função de x .

- Ordem da equação: as equações comuns geralmente são de ordem 1 (ou seja, envolvem apenas operações simples como adição, subtração, multiplicação e divisão). As equações diferenciais podem ser de ordem superior (envolvendo derivadas de ordem superior) e são mais complexas devido às derivadas.
- Soluções: em uma equação comum, a solução é um número ou conjunto de números que satisfazem a igualdade. Por exemplo, na equação $2x + 3 = 7$, a solução é $x = 2$.

Em uma equação diferencial, a solução é uma função ou um conjunto de funções que satisfazem a equação. Por exemplo:

Na equação diferencial $f(x) - f'(x) = 0$, pode-se reformular a equação sendo: $f(x) = f'(x)$ e com um conhecimento básico de derivadas, é possível identificar que a resposta é e^x , pois, é uma função que possui a propriedade de que sua derivada é igual a ela mesma.

Na equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$, a solução pode ser uma família de funções, como $y(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante arbitrária.

- Derivação: em equações comuns, não envolvem derivadas. As incógnitas são números e não funções. Em equações diferenciais, as derivadas estão presentes, indicando como a função incógnita varia com relação à variável independente.
- Modelagem: em equações comuns são frequentemente usadas para modelar situações estáticas, como a resolução de equações de balanço em economia. Equações diferenciais são usadas para modelar situações dinâmicas, como o crescimento de populações, a dissipação de calor, o movimento de objetos e muitos outros fenômenos que envolvem taxas de mudança.

Em resumo, a principal diferença entre uma equação comum e uma equação diferencial reside na natureza das incógnitas (números versus funções) e na presença de derivadas nas equações diferenciais. Equações diferenciais são usadas para modelar fenômenos dinâmicos e requerem soluções que são funções, enquanto as equações comuns são usadas para problemas estáticos e têm soluções que são números reais ou complexos.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Distribuição normal, também chamado de modelo de Gauss, serve para explicar inúmeros fenômenos naturais, físicos, psicológicos, sociológicos, é extremamente importante em Estatística pois serve de fundamento para muitas técnicas de inferência e aproximações.

As equações diferenciais, um ramo crucial da matemática, têm uma história que se estende por séculos, desempenhando um papel fundamental na resolução de problemas complexos em diversas disciplinas. Sua origem remonta ao século XVII, com o desenvolvimento do cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Eles estabeleceram as bases teóricas para lidar com taxas de mudança e derivadas, permitindo a formulação das primeiras equações diferenciais.

No século XVIII, Leonhard Euler desempenhou um papel vital na formalização das equações diferenciais, estabelecendo métodos gerais para a sua solução. Durante o século XIX, as equações diferenciais se tornaram cada vez mais importantes na física e engenharia, com contribuições notáveis de matemáticos como Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace. No século XX, com o advento da computação, as equações diferenciais foram essenciais para a modelagem de sistemas complexos em campos que vão desde a física nuclear até a biologia molecular.

A compreensão do que é uma equação diferencial começa com o mesmo raciocínio usado no estudo das integrais. Dado a derivada de uma função qualquer, seria possível encontrarmos a função que deu origem a essa derivada?

Exemplo: Se $f'(x) = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2 dx \rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow f(x) = x^3 + C$

Não há dúvida de que crescimento é um problema biológico, e que deve ser resolvido por experimentação, e não na mesa de um matemático. Mas, para se penetrar profundamente na natureza deste fenômeno, devemos combinar o método experimental com a teoria matemática. Uma possibilidade que tem sido desenvolvida por brilhantes pesquisadores. A combinação do método experimental com a teoria quantitativa é, em geral, uma das mais potentes ferramentas nas mãos da Ciência Contemporânea (G.F. Gause, 1934, p. 43).

A história das equações diferenciais é uma narrativa que abrange contribuições notáveis de matemáticos ao longo dos séculos, desempenhando um papel central na compreensão e solução de problemas complexos em uma variedade de disciplinas científicas e práticas. Dado esse contexto histórico, o subcapítulo subsequente se dedicará a uma investigação mais aprofundada no estudo das equações diferenciais.

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que relaciona a função desconhecida de uma variável independente com as suas derivadas em relação a essa variável. Uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, sua ordem é estabelecida pela maior ordem das derivadas que aparecem em sua formulação, sua 1ª ordem tem a forma geral dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

A forma geral dessa equação de ordem n é:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Onde y é a função desconhecida, x é a variável independente, e $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ são as suas derivadas de primeira, segunda, ..., enésima ordem, respectivamente.

Exemplo: $\frac{d^2y}{dx^2} - 16y = 0$. O símbolo y representa uma variável dependente e x uma variável independente. As equações diferenciais ordinárias são classificadas como:

- Lineares: são equações em que a função desconhecida e suas derivadas aparecem apenas em grau um ou zero, são relativamente fáceis de resolver e têm muitas aplicações práticas, como na modelagem de circuitos elétricos e sistemas mecânicos.
- Não-lineares: são equações em que a função desconhecida e/ou suas derivadas aparecem em grau maior do que um, são geralmente mais difíceis de resolver analiticamente e podem requerer métodos numéricos para obter soluções aproximadas.
- Primeira ordem: são equações em que a função desconhecida aparece apenas em sua primeira derivada, são comuns em muitas aplicações e podem ser resolvidas usando técnicas de separação de variáveis ou métodos numéricos.
- Segunda ordem: são equações em que a função desconhecida aparece em sua segunda derivada, são importantes na modelagem de populações biológicas, sistemas físicos, entre outros.

3.1.1 SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Definição: Toda função $f(x)$ em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas em I , as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.

Exemplo 1: $xy' + y = 0$; $y = \frac{1}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \rightarrow x \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{-x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0.$$

Ambos os lados são iguais para todo número real $x \neq 0$.

Exemplo 2: $y'' - y = 0$; $y = \text{sen}(x)$

$$y' = \text{cos}(x) \rightarrow y'' = -\text{sen}(x) \rightarrow -\text{sen}(x) - [\text{sen}(x)] = 0 \rightarrow -2\text{sen}(x) = 0.$$

Ambos os lados não são iguais.

3.2 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

A solução geométrica de uma EDO pode fornecer informações valiosas sobre o comportamento qualitativo das soluções, como a existência de pontos de equilíbrio, ciclos limite, estabilidade e outros fenômenos importantes. Ela permite uma compreensão visual e intuitiva do sistema dinâmico descrito pela equação diferencial, ajudando a analisar e interpretar os resultados de forma mais clara e significativa.

Resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

consiste em encontrar curvas $y = g(x)$, de modo que a direção da reta tangente em cada ponto de uma destas curvas coincida com o valor pré-estabelecido pela função $f(x, y)$ neste ponto. A família de todas as curvas que a satisfazem é denominada solução geral. Ao fixar um ponto no plano $P_0 = (x_0, y_0)$, se existir uma curva que passa por P_0 e a satisfaz, é denominada solução particular do problema de Cauchy.

Exemplo: Dado uma função $f(x) = \frac{1}{x}$, é solução da equação diferencial linear de primeira ordem $xy' + y = 0$.

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida para todos os valores de x , exceto $x = 0$. Portanto, o domínio da função é dado por $x \neq 0$.

A solução dessa equação é representada Q pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, que também tem o domínio dado por $x \neq 0$. Portanto, o domínio da solução é o mesmo que o da função, ou seja, $]0, \infty[$ intervalo aberto que inclui todos os valores de $x > 0$.

Essas observações indicam que tanto a função $f(x) = \frac{1}{x}$ quanto a solução $xy' + y = 0$ estão definidas para todos os valores de $x > 0$. O valor $x = 0$ é excluído do domínio de ambas as funções devido à singularidade em dividir por zero.

3.3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Os métodos analíticos são técnicas utilizadas para resolver equações diferenciais ordinárias de forma exata, sem recorrer a aproximações numéricas. Alguns dos métodos analíticos incluem:

- Método de separação de variáveis: que consiste em separar as variáveis dependentes e independentes da equação diferencial e resolver as equações separadamente.
- Método de substituição: utiliza uma substituição para transformar a EDO em uma equação algébrica que pode ser resolvida.
- Fator de Integração: técnica aplicada na resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem
- Problema do Valor Inicial: método é bastante útil em diversos campos da matemática

Em geral, estes métodos analíticos são mais eficientes e precisos do que os métodos numéricos, mas só são aplicáveis a equações diferenciais simples e com soluções bem conhecidas. Além disso, eles podem ser mais complexos e requerem habilidades matemáticas avançadas.

3.3.1 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Em geral, os métodos analíticos são úteis para resolver equações diferenciais ordinárias simples e bem definidas, mas podem se tornar cada vez mais complicados à medida que esta se torna mais complexa. Para equações diferenciais mais complicadas, pode ser necessário recorrer a métodos numéricos ou soluções aproximadas.

O método de separação de variáveis é uma técnica analítica utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. O objetivo é separar a equação em duas partes, uma que depende somente da variável dependente e outra que depende somente da variável independente, em que a equação pode ser escrita na forma:

$$y'(x) = f(x)g(y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

onde $y(x)$ é a função desconhecida, y' é a sua derivada em relação a x , $f(x)$ e $g(y)$ são funções conhecidas.

O método consiste em separar as variáveis x e y , ao se colocar todos os termos que dependem de x em um lado da equação e todos os termos que dependem de y no outro lado. Em seguida, integra-se ambos os lados da equação em relação às suas variáveis correspondentes e com algumas manipulações algébricas se obtém a solução geral da equação diferencial.

Exemplo 1: $y' - y = 0$.

Resolução: $y' - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dx \therefore$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \rightarrow \ln|y| + C_1 = x + C_2 \rightarrow y = e^{x+C_3} \rightarrow y = C_4 e^x$$

em que C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes de integração

$$\text{Portanto: } y = C e^x$$

Comprova-se que ao utilizar a técnica de variáveis separáveis e^x é a solução da EDO $y' - y = 0$, e $C e^x$ que representa uma família de soluções, ou seja, cada valor de C resulta em uma solução diferente para a equação.

Observação: Essa técnica é de grande importância para o estudo das equações diferenciais e em problemas de modelagem.

Ao utilizar essa ferramenta de resoluções das equações diferenciais é possível resolver diversos exercícios em que se conhece apenas a função que, quando substituída na equação principal a reduz em uma identidade.

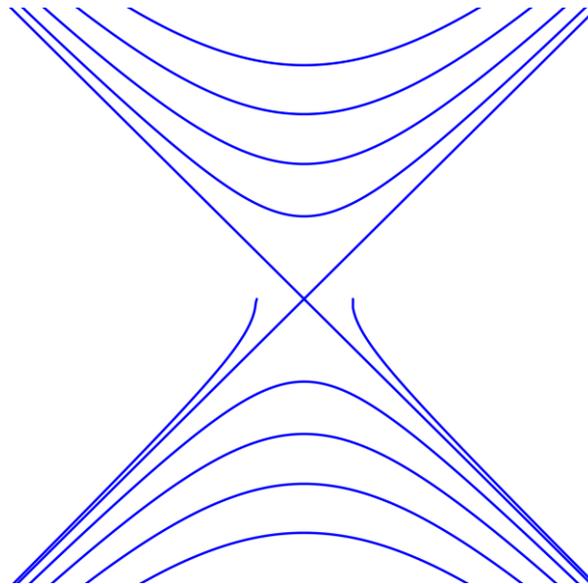
Exemplo 2: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$$ydy = xdx \rightarrow \int ydy = \int xdx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow y^2 = x^2 + C \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + C}$$

A notação \pm serve para indicar que existem duas soluções possíveis, uma com o sinal positivo e outra com o sinal negativo. A constante de integração C representa uma família de soluções, ou seja, cada valor de C resulta em uma solução diferente para a equação.

A ilustração apresentada na figura a seguir retrata a função solução da equação diferencial ordinária. A forma dessa função é determinada pela infinidade de valores potenciais da constante C . Ao empregar o conceito de campo de direções, é viável observar um subconjunto dessas soluções.

Figura 1 – Campo de direções e solução da ED.



Fonte: Autoria própria.

Esse método é bastante útil em diversos campos da matemática, física e engenharia, e é especialmente adequado para equações diferenciais com essa forma particular de separação de variáveis

Observação: É importante ressaltar que alguns exercícios não são possíveis resolver usando essa técnica, tais como $\frac{dy}{dx} + e^x = y$; e $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$.

3.3.2 MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

Método de Substituição é uma técnica usada para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Ele funciona ao transformar a equação diferencial em uma equação separada em duas partes, uma relacionada a x e outra a y , permitindo que sejam resolvidas separadamente.

Exemplo: Sejam $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y$,

Resolução: Pode-se usar a substituição $v = y - x^3$, para obter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 3x^2 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2 + y - 3x^2 \rightarrow \frac{dv}{dx} = y \rightarrow \frac{dv}{dx} = v + x^3$$

ao integrar ambos os lados da equação, obtém-se:

$$v(x) = Ce^x + x^3$$

onde C é uma constante de integração.

Ao retornar v na equação original tem-se:

$$y - x^3 = Ce^x - x^3 \therefore y = Ce^x$$

3.3.3 FATOR DE INTEGRAÇÃO

O fator de integração é uma técnica aplicada na resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Ele é utilizado quando a equação pode ser reescrita de modo que o coeficiente da derivada da variável dependente seja isolado como uma função separada. Ao multiplicar toda a equação pelo fator de integração apropriado, que é determinado pelo coeficiente da derivada, a equação é transformada em uma forma mais conveniente para a integração, isso permite obter uma solução mais direta da equação diferencial. O fator de integração desempenha um papel crucial na resolução analítica, proporcionando uma abordagem sistemática para encontrar a solução geral.

Para utilizar o fator de integração, é necessário que a equação diferencial seja linear de primeira ordem, que pode ser escrita na forma geral $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções de x . O fator de integração é então determinado pela função $P(x)$ e é utilizado para simplificar a equação diferencial, multiplicando-a por esse fator.

A equação $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ pode ser reformulada como:

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0 \tag{1}$$

$$\mu(x)dy + \mu(x) [P(x)y - Q(x)]dx = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu(x) = \frac{\partial}{\partial y} \mu(x) [P(x)y - Q(x)] \tag{3}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \tag{3}$$

Esta é uma equação separável em que é possível determinar $\mu(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= P(x)dx \\ \ln|\mu| &= \int P(x)dx \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{5}$$

A função $\mu(x)$ definida em (5) é um fator de integração para a equação linear. Note que não é necessário usar uma constante de integração em (4), pois (2) não se altera se a multiplicarmos por uma constante. Ainda, $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I , e é contínua e diferenciável.

É interessante observar que a equação (2) é ainda uma equação diferencial exata mesmo quando $Q(x)$. Na verdade, $Q(x)$ não desempenha papel algum na determinação de $\mu(x)$, pois vemos de (3) que $\frac{\partial}{\partial y} \mu(x)Q(x) =$

0. Logo, ambas

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} [P(x)y - Q(x)] dx$$

e

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} P(x)y dx$$

São diferenciais exatas. Agora se escreve (2) na forma

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} P(x)y dx = e^{\int P(x)dx} Q(x) dx$$

E averiguasse que é possível escrevê-la como

$$d[e^{\int P(x)dx} y] = e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + c$$

Integrando a última equação, é obtido

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + c$$

ou

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + ce^{-\int P(x)dx} \quad (6)$$

Em outras palavras se $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ tiver uma solução, ela deverá ser da forma (6).

Exemplo 1: $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

$$e^{\int (-3)dx} = e^{-3x} \rightarrow e^{-3x} \frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0 \rightarrow \frac{d}{dy} [e^{-3x}y] = 0 \rightarrow e^{-3x}y = C \therefore$$

$$y = ce^{3x}$$

A equação diferencial $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ é resolvida usando o método do fator de integração. Primeiro, utiliza-se o fator de integração, que é dado por $\mu(x) = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\mu(x)$, obtemos $\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 0$. Aplica-se Integral em relação a x , $e^{-3x}y = C$, onde C é uma constante de integração, então $y = Ce^{3x}$. A constante C pode ser interpretada como a condição inicial para determinar a solução específica da equação diferencial.

3.3.4 POBLEMA DO VALOR INICIAL

Esse método é bastante útil em diversos campos da matemática, física e engenharia, e é especialmente adequado para equações diferenciais com essa forma particular de separação de variáveis.

O problema do valor inicial consiste em encontrar uma solução para uma equação diferencial que satisfaça uma condição inicial especificada. Em outras palavras, é dado um ponto inicial (ou valor inicial) no domínio da função e sua derivada nesse ponto, e a tarefa é encontrar a função que descreve o comportamento da variável dependente a partir desse ponto.

Exemplo 1: $y = Ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções da equação diferencial de primeira ordem $y' = y$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

$y(0) = 3 \therefore x = 0$ e $y = 3$, ao substituir na equação principal, $3 = Ce^0 \rightarrow C = 3$. A função $y = 3e^x$ é uma solução do problema de valor inicial.

$$\text{Resolver: } \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Sujeita a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, onde y_0, y_1, \dots, y_{n-1} são constantes reais especificadas.

O exemplo utilizado acima pode ser reformulado da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = y ; y(0) = 3$$

Exemplo 2: considere a equação diferencial simples; $\frac{dy}{dx} = \text{sen}(x)$.

Para encontrar uma função $y(x)$ que atenda ambas as condições: a equação diferencial acima e a condição $y(0) = 1$. Utiliza-se variáveis separáveis para resolver o problema de valor inicial.

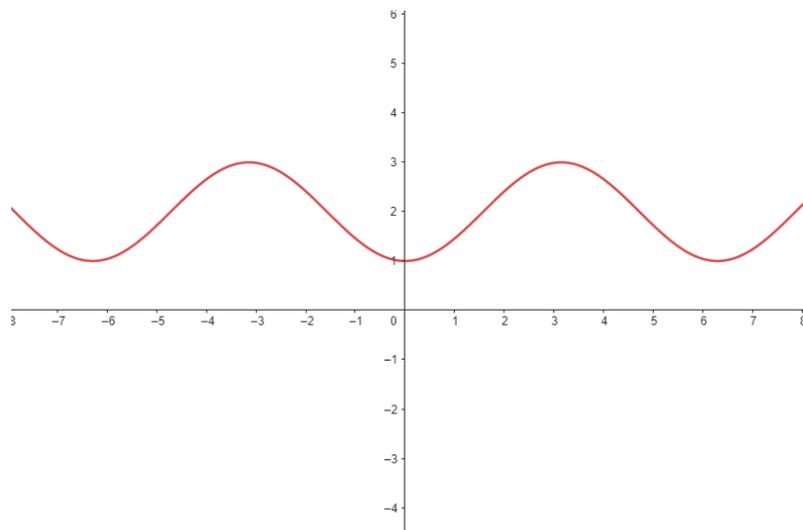
$$dy = \text{sen}(x)dx \rightarrow \int dy = \int \text{sen}(x)dx \rightarrow y = -\cos(x) + C$$

Substituindo os valores

$$1 = -\cos(0) + C \rightarrow 1 = -1 + C \rightarrow C = 2 \therefore y = -\cos(x) + 2$$

Ao obter o valor da constante C e encontrar a função resposta como, a figura 2 ilustra esse resultado específico, porém, com a determinação precisa de C , foi obtido uma função que descreve de forma característica o comportamento do sistema nas condições dadas.

Figura 2 – Gráfico da solução do PVI.



Fonte: Autoria própria.

Soluções para problemas de valor inicial são frequentemente encontradas por métodos numéricos, como o método de Euler, que envolve a aproximação da solução da equação diferencial em intervalos discretos de x . Também existem técnicas analíticas para resolver equações diferenciais, como a separação de variáveis, a transformada de Laplace e a série de potências, que podem ser usadas para resolver alguns problemas de valor inicial.

O problema do valor inicial é de grande importância em muitas áreas da física, engenharia e ciências aplicadas, pois as equações diferenciais são frequentemente usadas para modelar fenômenos dinâmicos e evolutivos em sistemas complexos. Encontrar soluções para problemas de valor inicial é crucial para entender o comportamento desses sistemas e para prever seu comportamento futuro.

4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos constituem uma ferramenta inestimável para a modelagem e resolução de problemas em diversas áreas de estudo, desde a física e a engenharia até a biologia e a economia. Elas podem aparecer também em

- **Astronomia e Física:** Os astrônomos usam métodos numéricos para calcular órbitas de planetas e prever eventos astronômicos. Na física, esses métodos são essenciais para simular sistemas complexos, como a dinâmica de partículas em aceleradores de partículas.
- **Engenharia:** Engenheiros usam métodos numéricos para projetar e analisar estruturas complexas, como pontes e edifícios, por meio de simulações de elementos finitos. Além disso, na engenharia de software, esses métodos são usados para resolver problemas de otimização em projetos de sistemas.
- **Biologia e Medicina:** Em biologia, métodos numéricos são usados para modelar populações de espécies, simular reações químicas em laboratórios virtuais e até mesmo para estudar o comportamento de células em sistemas biológicos complexos. Na medicina, essas técnicas são aplicadas em imagens médicas, como a tomografia computadorizada, para reconstruir imagens tridimensionais do corpo humano.
- **Economia e Finanças:** Em finanças, os métodos numéricos são usados para precificar opções financeiras, calcular o valor presente líquido de investimentos e simular o comportamento de mercados financeiros. Eles também são aplicados em economia para modelar sistemas econômicos complexos e prever tendências econômicas.
- **Ciência da Computação:** Na ciência da computação, os métodos numéricos são essenciais para a otimização de algoritmos, resolução de equações complexas e análise de dados em grande escala.

- Meteorologia e Climatologia: Previsões meteorológicas e modelagem climática dependem fortemente de métodos numéricos para simular o comportamento da atmosfera e prever o tempo e as mudanças climáticas.
- Simulações de Jogos e Animação: Em indústrias como videogames e animação, métodos numéricos são usados para criar simulações realistas de física, movimento e comportamento de objetos virtuais.

Esses exemplos destacam como os métodos numéricos desempenham um papel crucial em uma ampla variedade de campos, tornando-se uma ferramenta valiosa para resolver problemas complexos.

4.1 MÉTODO DE EULER

Algumas equações diferenciais requerem métodos de soluções além das variáveis separáveis, uma delas é o método de Euler, utilizado para encontrar pontos aproximados da função resposta. É um método numérico simples e eficaz para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ele é baseado na aproximação linear da solução entre pontos discretos em um intervalo, usando a derivada da equação diferencial em um ponto para calcular a solução no ponto seguinte. Sua fórmula é dado pela equação:

$$y_{k+1} = y_k + hy_k'$$

Exemplo de função: $y'(t) = y(t) - y^2(t)$, que representa uma equação logística não linear, onde $y(t)$ representa a população em um determinado tempo t .

Uma das vantagens do método de Euler é que ele é fácil de implementar e computacionalmente eficiente, além de poder ser adaptado para resolver equações diferenciais de ordem superior e sistemas de equações diferenciais. No entanto, há algumas limitações, ele pode produzir soluções imprecisas se o tamanho do passo (intervalo entre os pontos discretos) não for pequeno o suficiente. Além disso, não é adequado para

resolver equações diferenciais com soluções que mudam rapidamente ou são altamente não lineares, como são os caso das seguintes equações diferenciais:

- Oscilatórias do movimento de um pêndulo não linear, pois a rápida variação do ângulo do pêndulo durante a oscilação pode desafiar a capacidade do método de Euler em acompanhar com precisão essa mudança. Conseqüentemente, as estimativas obtidas podem não capturar adequadamente a natureza oscilatória do sistema.

$\theta''(t) + \text{sen}(\theta(t)) = 0$, função que descreve um pêndulo não linear, onde $\theta(t)$ é o ângulo em relação à posição vertical e $\theta''(t)$ representa a segunda derivada de θ em relação ao tempo.

- Não lineares complexas tais como modelos climáticos ou sistemas biológicos. A interação complexa e não linear presente nesses sistemas pode resultar em soluções imprecisas quando aproximadas pelo método de Euler.

Exemplo : Resolução de uma EDO utilizando o método de Euler.

$(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$, no ponto $y(1) = 2$ e com o passo $h = 0,1$.

- Primeiro passo: isolar o y' $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$
- Segundo passo: criar uma tabela de valores usando a fórmula de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k$$

Construção da tabela:

- $k = 0; x_0 = 1; y_0 = 2; h = 0,1$

$$i. y_1 = y_0 + hy'_0 \rightarrow 2 + 0,1 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1} \right) = 1,85$$

- $k = 1; x_1 = 1,1; y_1 = 1,85; h = 0,1$

$$ii. y_2 = y_1 + hy'_1 \rightarrow 1,85 + 0,1 \left(\frac{1,1}{1,85} - \frac{1,85}{1,1} \right) = 1,7413$$

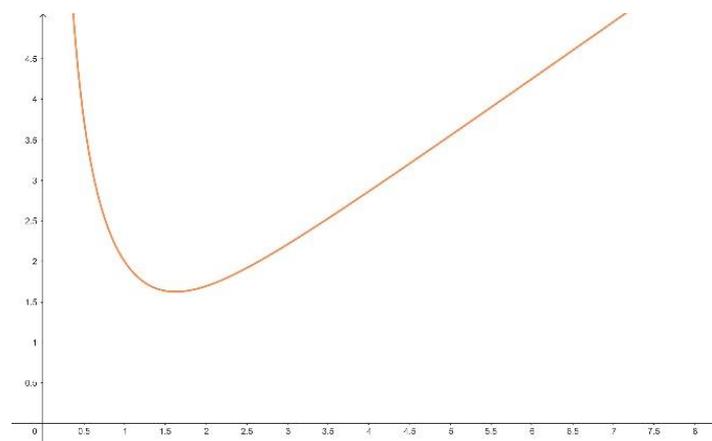
Tabela 1 – Pontos utilizando o método de Euler

Valores de x	Valores de y
1.00	2.000000
1.10	1.850000
1.20	1.741278
1.30	1.665086
1.40	1.615077
1.50	1.586397
1.60	1.575191
1.70	1.578317
1.80	1.593184
1.90	1.617655
2.00	1.649970

Fonte: Autoria Própria.

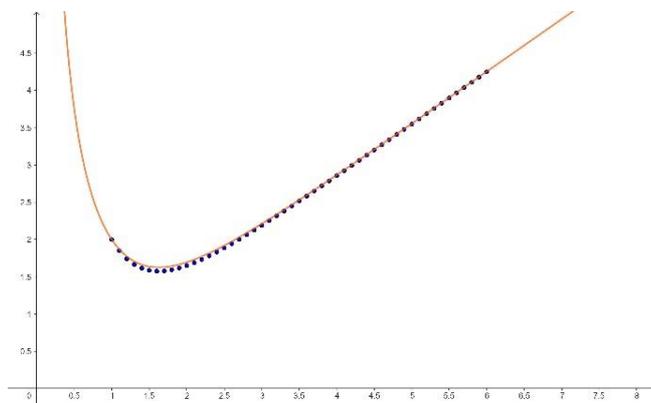
Utilizando métodos computacionais é possível gerar um gráfico com os pontos encontrados.

Figura 3 – Função exata.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Método de Euler.



Fonte: Autoria Própria.

A figura 3 e 4 são uma comparação entre a função exata e o método de Euler, a precisão deste método é evidentemente demonstrada pelos gráficos, e, no subcapítulo subsequente, será introduzido um método de maior eficácia.

4.2 MÉTODO DE EULER APERFEIÇOADO

O método de Euler aperfeiçoado, também conhecido como método de Euler melhorado ou método de Heun, é uma extensão do algoritmo básico utilizado para aproximar a solução de equações diferenciais ordinárias. Essa técnica visa aprimorar a precisão e a estabilidade das estimativas numéricas, especialmente em sistemas com soluções que apresentam rápida variação ou são altamente não lineares. A principal distinção em relação ao algoritmo básico é que o método aperfeiçoado emprega uma combinação ponderada de duas estimativas para calcular o próximo valor aproximado da solução. Primeiramente, uma estimativa inicial é obtida utilizando o algoritmo básico. Posteriormente, essa estimativa é refinada por meio da média ponderada entre a taxa de variação inicial e a taxa de variação calculada com base na estimativa inicial. Essa abordagem mais refinada contribui para melhorar a precisão das soluções numéricas, tornando o método de Euler aperfeiçoado uma ferramenta valiosa para problemas que requerem maior acurácia e estabilidade.

A fórmula do método de Euler aperfeiçoado é dada por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)]$$

onde y_k é a solução aproximada da equação diferencial no ponto x_k , $f(x_k, y_k)$ é a derivada da função y no ponto x_k , h é o tamanho do passo utilizado na aproximação e y_{k+1}^* é uma estimativa da solução no próximo ponto x_{k+1} .

Um exemplo de equação diferencial que pode ser resolvida com o método de Euler aperfeiçoado é:

$$(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$$

$$y(1) = 2$$

O método de Euler aperfeiçoado com um passo de $h = 0.1$, pode-se calcular a solução aproximada em diferentes pontos do intervalo $[1, 2]$, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 2 – Pontos utilizando o método de Euler Aperfeiçoado

Valores de x	Valores de y
1.0	2.000000
1.1	1.870639
1.2	1.775807
1.3	1.708734
1.4	1.664342
1.5	1.638665
1.6	1.628510
1.7	1.631259
1.8	1.644740
1.9	1.667147
2.0	1.696978

Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Comparação entre função exata (figura 5a) e o método de Euler aperfeiçoado (figura 5b).

Figura 5a

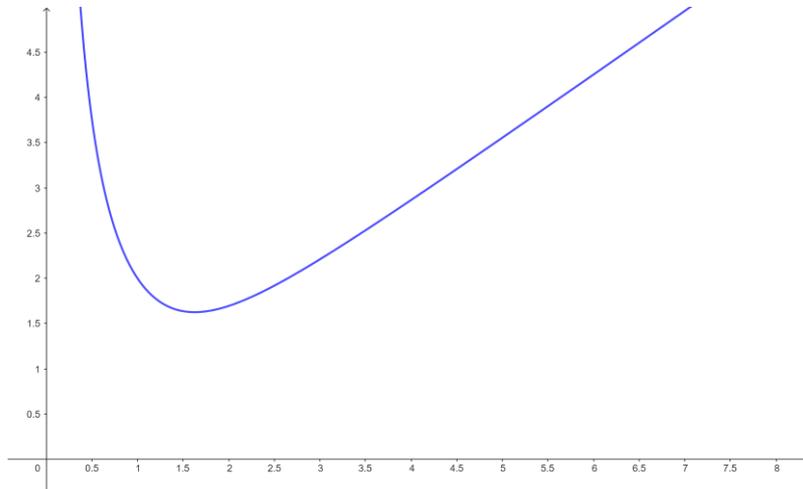
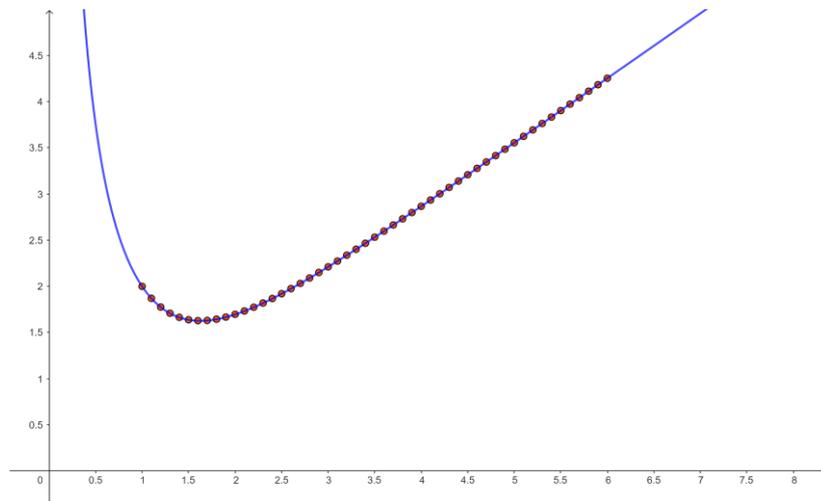


Figura 5b



Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que o método de Euler aperfeiçoado tem uma eficácia maior que seu antecessor.

5 APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nos capítulos anteriores, foi amplamente discutida a importância das aplicações das equações diferenciais em diversas áreas do conhecimento. Elas são particularmente valiosas na modelagem e na análise de processos que evoluem ao longo do tempo, como o crescimento populacional, o decaimento radioativo e até mesmo a solubilidade de substâncias em soluções os quais serão descritos a seguir.

5.1 CRESCIMENTO POPULACIONAL

A compreensão do crescimento populacional é um campo vital da demografia e da sociologia, abordado em várias obras relevantes. O livro "Princípios de Demografia" de John A. Ross explora detalhadamente o crescimento populacional e os fatores subjacentes que o influenciam. Em sua obra, Ross destaca a importância da análise de taxas de natalidade, mortalidade e migração para entender as dinâmicas populacionais. Além disso, "Demografia: Análise e Perspectivas" de Ronald R. Rindfuss oferece uma visão abrangente das tendências demográficas e suas implicações em áreas como política, urbanismo e economia. Esses livros fornecem um sólido alicerce para a compreensão das complexidades do crescimento populacional.

O crescimento populacional é frequentemente abordado por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Textos como "Equações Diferenciais Ordinárias" de George F. Simmons e "Introduction to Ordinary Differential Equations" de Shepley L. Ross são referências valiosas. Essas obras exploram como as EDOs podem ser usadas para modelar o crescimento populacional ao longo do tempo, levando em consideração variáveis como taxas de natalidade e mortalidade. Através dessas equações, é possível realizar previsões demográficas e analisar as dinâmicas complexas das populações. A literatura matemática fornece uma base sólida para compreender como as EDOs são aplicadas à demografia e ao estudo do crescimento populacional.

5.1.1 MODELO MALTHUSIANO

Um dos modelos de crescimento populacional mais conhecidos e do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798. O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Matematicamente, se $P(t)$ é a população total no instante t , então, o modelo contínuo de Malthus é:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é uma constante de proporcionalidade (nesse caso $k > 0$). Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como por exemplo crescimento de formigas, pois não leva em conta muitos fatores que podem influenciar a população tanto em seu crescimento quanto em seu declínio.

Utilizando a equação do modelo de Malthus é possível encontrar a função que satisfaz a igualdade.

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt \rightarrow \ln|P| = kt + C \rightarrow P = e^{kt+C} \therefore P = Ce^{kt}$$

Sabendo-se que uma certa população cresce segundo o modelo malthusiano e $P(0) = P_0$, então:

$$P = P_0 e^{kt}$$

Aplicação 1:

Considere uma colônia de formigas em que a população varia ao longo do tempo. Denotaremos essa população como $N(t)$, onde t é o tempo. No tempo inicial t_0 a população de formigas é de 100, ou seja, $N_0 = 100$. Suponha que a taxa de crescimento dessa colônia seja proporcional ao número atual de formigas e à quantidade de comida disponível no ambiente. Essa taxa de crescimento é modelada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot F(t)$$

Onde:

- $\frac{dN}{dt}$ é a taxa de variação da população de formigas em relação ao tempo.
- k é uma constante de proporcionalidade.
- N é a população de formigas.
- $F(t)$ é a quantidade de comida disponível.

A quantidade de comida disponível, $F(t)$, varia ao longo do tempo e é influenciada por fatores externos, como a estação do ano. Vamos considerar uma função específica para a quantidade de comida disponível:

$$F(t) = a \cdot \text{sen}(t)$$

Onde:

- a é a amplitude da função seno.

Determinar:

- a) A solução geral da equação diferencial $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot F(t)$

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot F(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dN}{N} = k \cdot F(t) \cdot dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int k \cdot F(t) \cdot dt \quad \rightarrow \quad \ln|N| = k \int F(t) \cdot dt$$

$$\ln|N| = k \int F(t) \cdot dt \quad \rightarrow \quad N(t) = e^{k \int F(t) \cdot dt}$$

$$N(t) = e^{k \int a \cdot \text{sen}(t) \cdot dt} \quad \rightarrow \quad N(t) = e^{-k \cdot a \cdot \cos(t) + C}$$

$$N(t) = C e^{-k \cdot a \cdot \cos(t)}$$

- b) A solução particular da equação diferencial para obter a população de formigas em diferentes instantes de tempo, com base nos valores fornecidos $N_0 = 100$ e $t_0 = 0$.

$$100 = Ce^{-k.a.\cos(0)} \rightarrow 100 = Ce^{-k.a} \rightarrow C = \frac{100}{e^{-k.a}}$$

$$N(t) = \frac{100}{e^{-k.a}} e^{-k.a.\cos(t)} \rightarrow N(t) = 100e^{-k.a.\cos(t)+k.a}$$

$$N(t) = 100e^{k.a[-\cos(t)+1]}$$

c) A quantidade máxima e mínima da população.

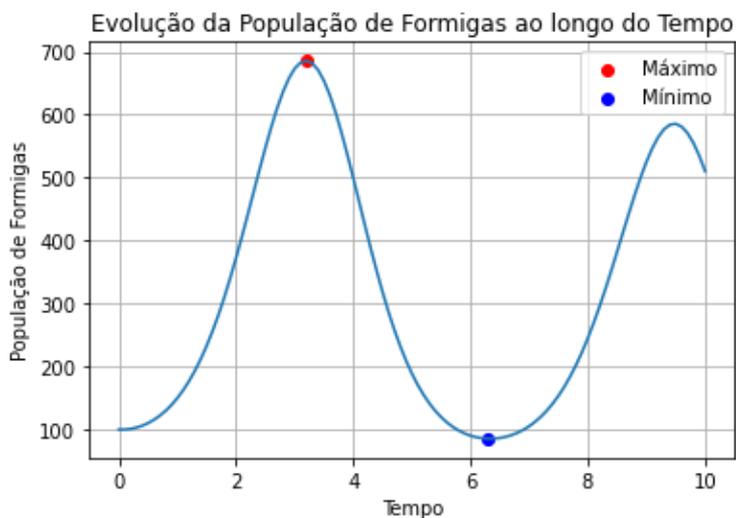
Tabela 3 – Pontos utilizando o método de Euler Aperfeiçoado

Tempo	População
0.00	100.00
0.10	100.00
0.20	101.00
0.30	103.00
0.40	106.05
0.50	110.18
0.60	115.46
0.70	121.98
0.80	129.84
0.90	139.15
1.00	150.05

Fonte: Autoria própria.

As tabelas nesse trabalho foram criadas utilizando o software Python, neste trabalho foi utilizado para estudo de dados mas é uma linguagem de programação versátil e de alto nível e amplamente utilizada em diversas áreas.

Figura 6 – População máxima e mínima.



Fonte: Autoria própria.

População máxima: 685,64

População mínima: 85,35

Aplicação 2:

Dada uma tabela, é possível utilizar as informações de tempo e população para realizar previsões acerca do crescimento populacional futuro.

Estimativa da população de um município baseado nos anos anteriores. Capetinga - MG (IBGE - 2023).

Tabela 4 – População do município

Tempo	População
2015	7185
2016	7168
2017	7152

Fonte: Autoria própria.

Estimativa da população de um município baseado nos anos anteriores. Capetinga - MG (IBGE - 2023).

Utilizando $P = P_0 e^{kt}$ para encontrar a taxa de crescimento:

$$7152 = 7185e^{2k} \rightarrow \ln\left(\frac{7152}{7185}\right) = 2k \ln e \rightarrow \frac{\ln\left(\frac{7152}{7185}\right)}{2} = k \rightarrow k \approx -0,0023$$

Agora utilizando essa taxa para estimar a população dessa cidade em 2023 (2017 - 2023).

$$P_6 = 7152e^{6(-0,0023)} \rightarrow P_6 \approx 7053$$

A população 'real' em 2022 nessa cidade é de 6920 habitantes, ou seja, um erro inferior a 2%.

5.2 DECAIMENTO RADIOATIVO

No estudo do decaimento radioativo, as equações diferenciais são aplicadas para descrever a taxa de decaimento de uma substância radioativa ao longo do tempo, levando em conta a constante de decaimento específica. Essas equações fornecem uma base sólida para determinar a quantidade de substância radioativa remanescente em um momento dado e para compreender o processo de degradação ao longo do tempo. Isso é fundamental em campos como medicina nuclear, indústria de energia nuclear e datação por carbono, onde a precisão na estimativa do decaimento é crucial.

Aplicação 3:

Suponha que uma substância radioativa inicialmente com uma quantidade de 200 gramas. A taxa de decaimento é de 0,1 unidades de 1/tempo. O objetivo é determinar a quantidade de substância restante após 3 unidades de tempo.

Para resolver esse problema, utiliza-se a equação diferencial do decaimento radioativo: $\frac{dN}{dt} = -kN$, onde N é a quantidade da substância radioativa no tempo t e k é a constante de decaimento.

- Passo 1: Definir a EDO $\frac{dN}{dt} = -0,1N$.
- Passo 2: Definir a condição inicial $N(0) = 200$ (quantidade inicial).
- Passo 3: Resolver a EDO Utilizando o método de separação de variáveis,

$$\frac{1}{N} dN = -0,1dt \rightarrow \int \frac{1}{N} dN = \int -0,1dt \rightarrow \ln|N| = -0,1t + C \rightarrow N = Ce^{-0,1t}$$

- Passo 4: Aplicar a condição inicial:

$$200 = Ce^{-0,1(0)} \rightarrow C = 200$$

Portanto, a equação geral da quantidade de substância radioativa em função do tempo é:

$$N = 200e^{-0,1t}$$

- Passo 5: Substituir o valor de t e encontrar a quantidade restante. Substituindo $t = 3$ na equação, temos:

$$N = 200e^{-0,1(3)} \rightarrow N = 200e^{-0,3} \rightarrow N \approx 200(0,74082) \rightarrow N \approx 148,164$$

Portanto, a quantidade de substância radioativa restante após 3 unidades de tempo é aproximadamente 148,164 gramas.

5.3 SOLUBILIDADE DE SUBSTÂNCIAS EM SOLVENTES

As EDOs também são aplicadas na área da química para modelar a solubilidade de substâncias em solventes. Elas permitem descrever como a concentração de uma substância solúvel muda ao longo do tempo em uma solução, levando em consideração fatores como temperatura, pressão e as propriedades dos solventes e solutos. Essa modelagem é fundamental em química industrial, farmacologia e processos de fabricação, onde o controle da solubilidade é crucial para obter produtos de alta qualidade e eficiência.

Aplicação 4:

Considere um composto sólido A que está se dissolvendo em água. A quantidade de A que se dissolve em água ao longo do tempo é governada pela Lei da Cinética de Dissolução:

$$\frac{dS}{dt} = -k(S - S_{eq})$$

Onde:

- $\frac{dS}{dt}$ é a taxa de variação da quantidade de A dissolvido em relação ao tempo t .
- k é uma constante de dissolução.
- S é a quantidade de A dissolvido em água.
- S_{eq} é a solubilidade em equilíbrio de A em água.

Suponha que inicialmente $S(0) = 0$, ou seja, não há A dissolvido em água no início. E a solubilidade de equilíbrio S_{eq} seja igual a 50 gramas por litro.

a) Qual é a solução geral da equação de dissolução para $S(t)$?

$$\frac{dS}{dt} = -k(S - S_{eq}) \rightarrow \frac{dS}{S - S_{eq}} = -k dt$$

$$\int \frac{dS}{S - S_{eq}} = \int -k dt \rightarrow \ln|S - S_{eq}| = -kt + C \therefore S - S_{eq} = C e^{kt}$$

b) Qual é a quantidade de A dissolvida em água após 2 horas se $k = 0,1h^{-1}$?

$$S - S_{eq} = C e^{(-0,1)2}$$

Como $S(0) = 0$, é possível substituir S por 0 e resolver para C :

$$0 - S_{eq} = C e^{-0,2} \rightarrow C = -S_{eq} e^{0,2}$$

S após 2 horas:

$$S = S_{eq} - S_{eq} e^{-0,2} \rightarrow S = S_{eq} (1 - e^{-0,2})$$

Agora é possível encontrar o valor numérico:

$$S = 50g/L(1 - e^{-0,2}) \rightarrow S \approx 11,07g/L$$

c) Qual é o tempo necessário para que $S(t)$ atinja 40 gramas?

$$40g/L - 50g/L = -S_{eq} e^{-0,1t} \rightarrow -10 = -S_{eq} e^{-0,1t}$$

$$e^{-0,1t} = \frac{10}{S_{eq}} \rightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{10}{S_{eq}}\right) \rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{10}{S_{eq}}\right)}{-0,1} \rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{10}{50}\right)}{-0,1}$$

$$t = \frac{\ln(0,2)}{-0,1} \rightarrow t \approx 16,09 \text{ horas}$$

Portanto, levará aproximadamente 16,09 horas para que a quantidade A dissolvida atinja 40 gramas.

Essas aplicações ilustram a importância das EDOs na modelagem e na compreensão de fenômenos complexos presentes em diversas áreas do conhecimento, incluindo o estudo da solubilidade, onde elas desempenham um papel fundamental na análise e no controle de processos químicos. Elas oferecem uma ferramenta poderosa para a análise de sistemas dinâmicos e a previsão de comportamentos ao longo do tempo, contribuindo significativamente para o avanço da ciência e da tecnologia em muitos campos diferentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito desse trabalho foi apresentar uma abordagem teórica das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, bem como discutir exemplos e aplicações dessas equações em diversas áreas do conhecimento.

Foram apresentados os conceitos básicos de equações diferenciais, métodos analíticos e numéricos para a resolução dessas equações, exemplos de equações diferenciais de primeira ordem e aplicações dessas equações em áreas diversas, uma vez que a compreensão sólida de modelos clássicos é essencial para a formulação de modelos em situações novas pois, uma única equação variacional (diferencial ou de diferenças) pode ser adaptada para descrever situações diferentes, mas com características evolutivas semelhantes.

Quando se conhece bem os modelos clássicos tem-se mais facilidade em modelar situações novas, mesmo porque uma única equação variacional (diferencial ou de diferenças) pode servir de modelo para situações de naturezas diversas, mas análogas em termos evolutivos. Boa parte da evolução e competência do que se convencionou chamar de Matemática Aplicada é baseada nos paradigmas ou modelos clássicos provenientes da Física. A Matemática fornece a linguagem comum neste processo.

Ao longo deste estudo, explorou-se os conceitos teóricos fundamentais das equações diferenciais de primeira ordem com exemplos concretos de como essas equações desempenham um papel crucial na modelagem e na compreensão de fenômenos em diferentes campos da ciência e da engenharia, com foco nas aplicações em crescimento populacional, decaimento radioativo e solubilidade de substâncias em solventes.

As equações diferenciais ordinárias representam uma ferramenta poderosa para descrever a dinâmica de sistemas e processos que evoluem com o tempo. Através da análise teórica e da aplicação de métodos analíticos e numéricos, pode-se não apenas compreender o comportamento desses sistemas, mas também prever seu desenvolvimento futuro. Isso se mostrou particularmente valioso em cenários como o crescimento populacional, onde utilizou-se a equação logística para modelar a interação complexa entre taxas de natalidade e fatores limitantes, e no caso do decaimento radioativo, onde quantificou-se o processo de decaimento ao longo do tempo. A solubilidade de substâncias em solventes também se revelou um campo de aplicação fundamental, demonstrando como equações diferenciais de primeira ordem podem ser usadas para entender a taxa de dissolução de substâncias em líquidos, um aspecto crítico em indústrias químicas e farmacêuticas.

Ao longo deste trabalho, enfatizou-se a importância dos métodos numéricos, como o Método de Euler e suas variantes, na solução de equações diferenciais de forma computacional. Essas abordagens permitem uma análise precisa e eficiente, ampliando a utilidade das equações diferenciais em diversas áreas, uma vez que, quando o modelo matemático assume a forma de uma equação diferencial, nem sempre é possível obter informações ou projeções da realidade modelada por meio de soluções explícitas. Nesse contexto, a aplicação de métodos computacionais na resolução de equações diferenciais tem desempenhado um papel significativo no aprimoramento dos modelos, aumentando sua credibilidade e, conseqüentemente, ampliando sua utilidade em diversas áreas do conhecimento. Esse avanço tecnológico tem contribuído para tornar os modelos mais acessíveis e aplicáveis, impulsionando a pesquisa e a inovação em várias disciplinas.

REFERENCIAS

BASSANEZZI, R. C. Introdução à Modelagem Matemática. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2002.

Blum, W.; & Leiss, D. Modelos e modelagem matemática. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelagem Matemática – Perspectivas, Ensino e Aplicações p. 11-18, SBM, 2005.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10ª edição. Editora LTC, 19 de fevereiro de 2015.

COHEN, Joel E. How many people can the Earth support? 1. ed. New York: W. W. Norton & Company, 1995.

GAUSE, G. F. The struggle for existence. Baltimore: Williams and Wilkins, p. 43, 1934.

RINDFUSS, Ronald R. Demografia: Análise e Perspectivas. Editora Population and Environment, 2004.

Simmons, G. F. Equações Diferenciais Ordinárias. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

TAVONI, R.; ZOTIN G. DE OLIVEIRA, R. Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 2, p. 86–99, 2013.

ZILL, Dennis G. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: com Aplicações em Modelagem. 3. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2016, p. 504.