

GRAFOS: uma proposta de atividades para o Ensino Médio.

Gabriela Fernanda Moreira
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
moreirafernandagabriela@gmail.com

Maurício Conrado Alves
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
mconrado193@gmail.com

Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

RESUMO

Grafos são representações subjetivas formadas por dois conjuntos: vértices e arestas, comumente usados para representar situações tais como rodovias entre uma cidade e outra; rede de distribuição de energia elétrica interligando casas, hiperlinks de uma página da web e outros. O objetivo principal deste trabalho é o estudo sistemático e introdutório da Teoria de Grafos, relacionar grafos a matrizes de adjacência e de incidência, além dos algoritmos de Dijkstra e de Floyd-Warshall para encontrar o menor caminho. Compreender que a interpretação de um problema pode ser transcrita por meio de uma modelagem antes de encontrar sua solução, nesse caso a utilização de um desenho (grafo) para modelá-lo, oferece ferramentas adequadas para tomada de decisões na busca de uma solução, a qual pode ser obtida manualmente ou com o auxílio de um computador com novas oportunidades de aprendizagem, até mesmo em outras disciplinas e assuntos que não sejam a Matemática. Devido ao fato de este trabalho de conclusão de curso ser de licenciatura de Matemática optou-se como aplicação, desenvolver uma proposta de atividades para alunos do Ensino Médio para relacionar a teoria estudada, com intuito de levá-los a experienciar um conteúdo não presente na grade curricular, mas que pode ser utilizado para explicar e resolver situações do cotidiano.

Palavras-chave: Grafos. Ensino Médio. Menor caminho. Aplicações.

ABSTRACT

Graphs are subjective representations formed by two sets: vertices and edges, commonly used to represent situations such as highways between one city and another; electricity distribution network connecting houses, hyperlinks of a web page and others. The main objective of this work is the systematic and introductory study of Graph Theory, relating graphs to adjacency and incidence matrices, in addition to the Dijkstra and Floyd-Warshall algorithms to find the shortest path. Understanding that the interpretation of a problem can be transcribed through a modeling before finding its solution, in this case the use of a drawing (graph) to model it, offers adequate tools for decision making in the search for a solution, the which can be obtained manually or with the aid of a computer with new learning opportunities, even in subjects other than Mathematics. Due to the fact that this course conclusion work is a Mathematics degree, it was chosen as an application, to develop a proposal of activities for high school students to relate the theory studied, in order to get them to experience a content not present in the curriculum. curriculum, but that can be used to explain and solve everyday situations.

Keywords: Graph, High school, Shortest path, Applications.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Boaventura netto/Jurkiewicz (2009), grafos são estruturas discretas que podem ser utilizadas na representação e resolução de várias classes de problemas algorítmicos. Por exemplo, existem os “problemas de decisão” cujo objetivo consiste em decidir a resposta **sim** ou **não** a uma questão; os de “localização” em que o objetivo é localizar certa estrutura e que satisfaça um conjunto de propriedades dadas e os de “otimização” que envolvem critérios de maximização e minimização. Os algoritmos associados a esses problemas permitem verificar a existência de caminhos para ir de um objeto a outro seguindo determinadas conexões.

Grafos estão interligados com a Matemática e com várias áreas, tais como: sociologia, biologia, computação, jogos, cinematografia etc. Apesar de estarem presente em diferentes áreas, possuem importâncias específicas dentro de cada uma. Um grafo pode ser uma espécie de mapa rodoviário, os vértices são as cidades e as arestas são estradas de mão dupla que ligam as cidades; ou uma rede de distribuição de energia elétrica interligando casas. Na web, os vértices são representados pelas páginas, e as arestas pelos hiperlinks entre elas. Nas redes sociais obtêm-se grafos por meio de ciclos de amizades distintas, por exemplo, o A é amigo de B, D, e G, mas o B, não é amigo de D e G, através do A o B começa a ter uma relação mesmo que indireta com D e G, pois ambos possuem uma amizade em comum com A. Outros exemplos poderiam ser expostos, mas o essencial é ter a percepção que os grafos estão presentes em inúmeros contextos.

Uma grande complexidade de estruturas do mundo real pode ser representada subjetivamente por meio de grafos, os quais são representações abstratas poderosas e flexíveis, e possuem características específicas em diferentes áreas.

Assim, este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 descrevemos as primeiras noções de grafos abordando os conceitos iniciais da teoria, como por exemplo, grafo simples, planar, conexo, grau de um grafo,

grafos isomorfos, representação de grafos por matrizes, entre outros, faz-se um breve estudo sobre ciclo, caminho, conexidade e grafos valorados, representações de grafos por esquemas ou diagramas e por conjuntos. Nos capítulos 3 e 4 são apresentados os Problemas do Caminho Mínimo de Dijkstra e de Floyd- Warshall, Waze e aplicações. No capítulo 5 são propostas atividades e alguns problemas onde as soluções serão abordadas por grafos, cuja teoria, embora tenha uma sofisticada estrutura matemática, pode ser aplicada a problemas com enunciados simples e de fácil entendimento nos currículos de Ensino Médio.

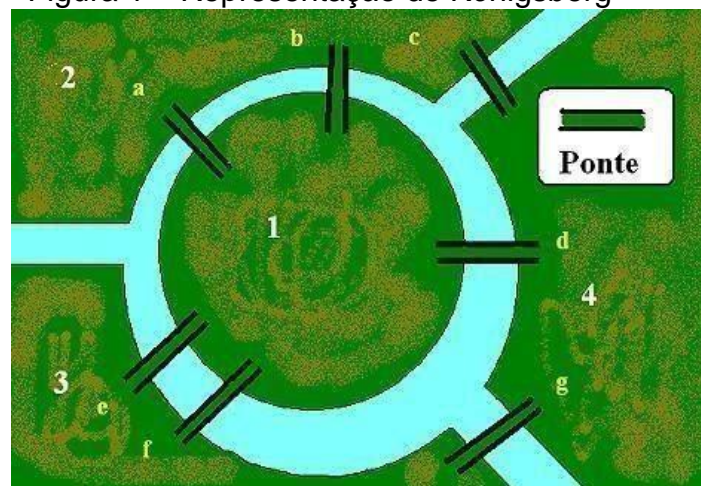
2. GRAFOS

Neste capítulo aborda-se o desenvolvimento histórico, noções preliminares sobre a Teoria de Grafos; grau de um vértice; tipos de grafos e isomorfismos entre eles; dígrafos, bem como a sua representação através de matrizes e/ou tabelas.

2.1. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

Os grafos surgem em 1736, por intermédio do problema das Sete pontes de Königsberg, cidade que foi erguida entre o Rio Pregel, onde existem duas ilhas e para ajudar a passagem das pessoas e do transporte de cargas, foram construídas sete pontes em diferentes locais como mostra a Figura 1. (BOAVENTURA NETTO/JURKIEWICZ, 2009, p.1,2.)

Figura 1 – Representação de Königsberg

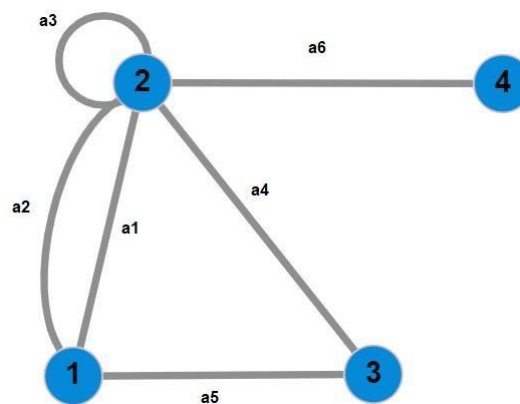


Fonte: Wikipedia, 2021, online.

Os habitantes queriam saber se era possível fazer um percurso partindo de uma origem e retornando nela mesma, passando por todas as pontes uma única vez. O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi o primeiro que conseguiu desenvolver uma solução para o tal problema e provar que não era possível realizar o percurso dentro das prescrições que os habitantes sugeriram, além de criar um diagrama para representar a cidade e generalizar o problema.

Grafo é uma representação subjetiva, neste trabalho faremos o uso de suas duas definições: uma está fundamentada em uma representação visual como mostra a Figura 2, e outra é uma representação formal. De modo informal pode-se definir grafo como um conjunto não-vazio de nós (vértices) e um conjunto de arcos (arestas), de forma que estes arcos conectam dois nós, tal definição funciona apenas para a representação visual deste grafo.

Figura 2 – Representação Visual



Fonte: autoria própria.

Gersting (1940), define grafo da seguinte forma: “Um grafo é uma tripla ordenadas (N, A, g) ”, em que:

N = um conjunto não-vazio de nós (vértices)

A = um conjunto de arcos (arestas)

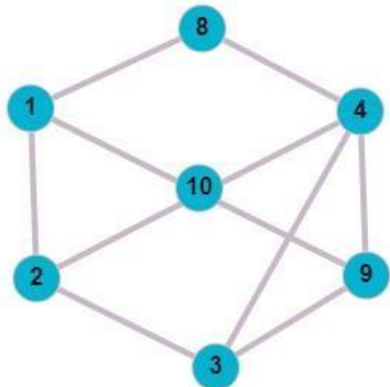
G = uma função que associa a cada arco a um par não-ordenado x - y de nós, chama-se de extremidades de a , como mostra a Figura 2.

Para o grafo da Figura 2, a função g que associa arcos as suas extremidades é a seguinte: $g(a_1) = 1-2$, $g(a_2) = 1-2$, $g(a_3) = 2-2$, $g(a_4) = 2-3$, $g(a_5) = 1-3$ e $g(a_6) = 2-4$.

Quando apenas é admitida no máximo um arco entre dois nós, diz-

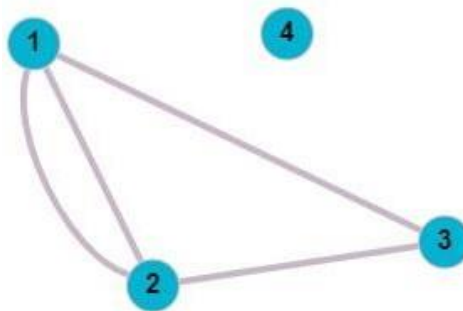
se que estes nós são adjacentes, como mostra a Figura 3, os nós 1 e 8 são adjacentes, mas 1 e 3 não. Qualquer nó que não é adjacente a nenhum nó é chamado de nó isolado, como na Figura 4.

Figura 3 - Os nós 1 e 8 são adjacentes.



Fonte: autoria própria.

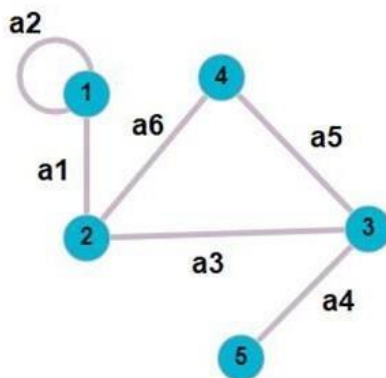
Figura 4 - O nó 4 é um nó isolado.



Fonte: autoria própria.

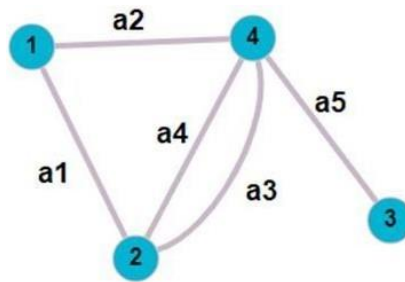
Um laço em um grafo é um arco com as extremidades n-n, como mostra a Figura 5. Quando o grafo não tiver arestas duplas, este grafo é simples. Dois arcos que possuem as mesmas extremidades são chamados de arcos paralelos, como mostra a Figura 6.

Figura 5 - O arco a2 é um laço com extremidade 1-1.



Fonte: autoria própria.

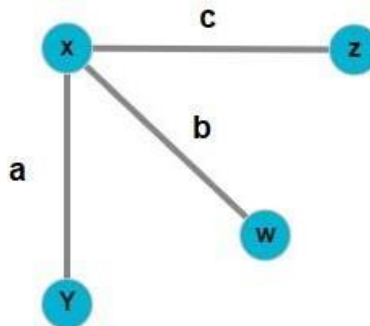
Figura 6 - O arco a3 e a4 são arcos paralelos.



Fonte: autoria própria.

O número de arestas incidentes no vértice expressa o grau desse vértice. O grau máximo do grafo é o maior dos vértices ($X(G)$), por consequência o grau mínimo ($Y(G)$) é o menor. Na Figura 7 o vértice X tem três arestas incidentes, logo o grau é 3. Os vértices Z, W e Y tem uma aresta incidente, sendo assim, todos são grau 1. Dessa forma, o grau máximo do grafo é 3 e o mínimo é 1.

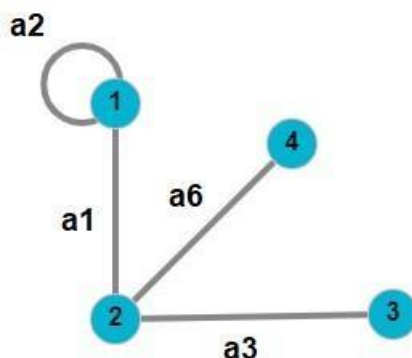
Figura 7 - Grau máximo do grafo é 3 e o mínimo é 1.



Fonte: autoria própria.

Um subgrafo de um grafo corresponde um conjunto de arcos e nós que são subconjuntos do conjunto original de arcos e nós de um grafo, nos quais a extremidades de um arco deve ser o mesmo do original. A Figura 8 apresenta um subgrafo da Figura 5.

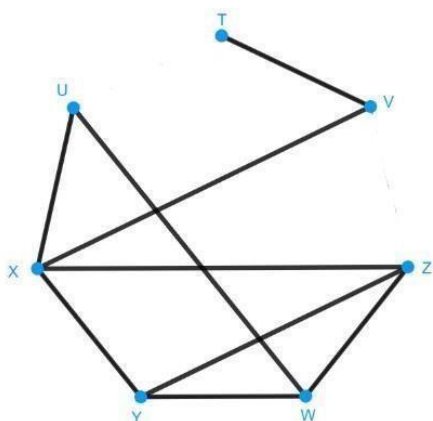
Figura 8 – Representação de um subgrafo.



Fonte: autoria própria.

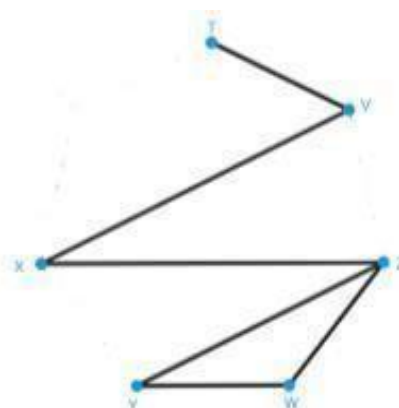
Uma sequência de nós em que estão ligados por arcos do grafo refere-se a um caminho. Os vértices T-V-X-Z-Y-W ilustrados na Figura 9 formam um caminho encontrado no grafo da Figura 10.

Figura 9



Fonte: autoria própria.

Figura 10

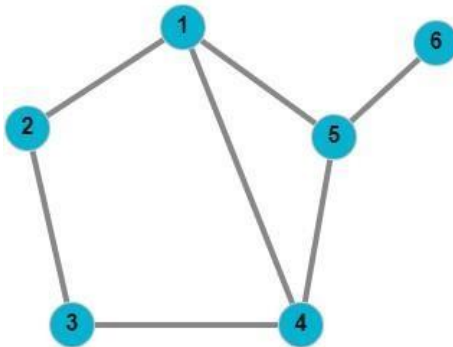


Fonte: autoria própria.

Por meio dos números de arcos que contém um caminho, pode-se obter seu comprimento, ressaltamos que se um arco for utilizado mais de uma vez, ele deve ser contado cada vez que for usado.

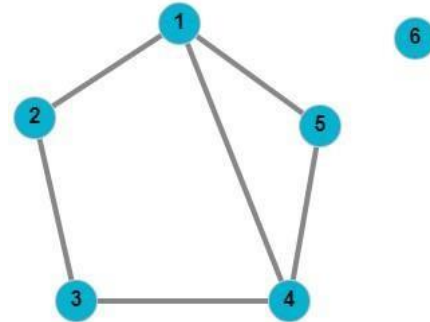
Em um grafo conexo existe um caminho de qualquer nó para qualquer outro. Basta que não exista um caminho entre um nó e qualquer outro nó do grafo para ser considerado desconexo, como ilustram as Figuras 11 e 12.

Figura 11 – Grafo Conexo



Fonte: autoria própria.

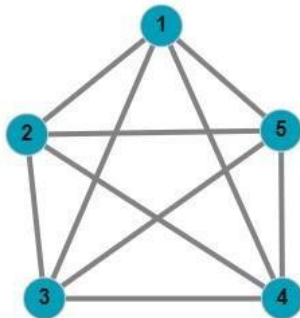
Figura 12 – Grafo Desconexo



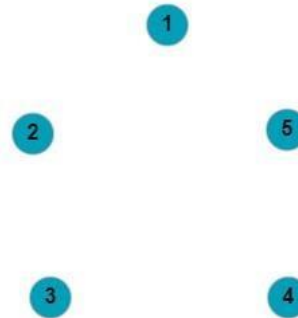
Fonte: autoria própria.

Um grafo pode ser totalmente conexo, isto ocorre quando todos os nós do grafo são adjacentes aos demais, pode-se chamar este grafo de completo. E um grafo é totalmente desconexo quando todos os seus nós têm grau zero, como mostram as Figuras 13 e 14.

Figura 13 – Grafo totalmente conexo Figura 14 - Grafo totalmente desconexo



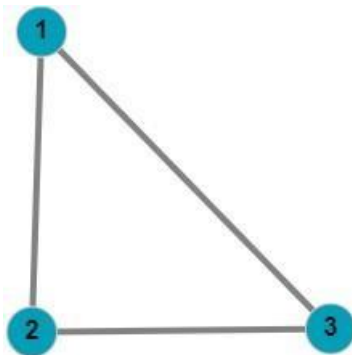
Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

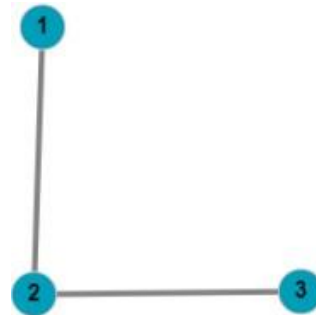
Ciclo é um caminho de algum nó N_0 para ele mesmo de tal modo que não apareça nenhum arco mais de uma vez. N_0 é o único nó que vai aparecer mais de uma única vez. Um grafo que não apresenta um ciclo é dito grafo acíclico, como mostram as Figuras 15 e 16.

Figura 15 - Ciclo



Fonte: autoria própria

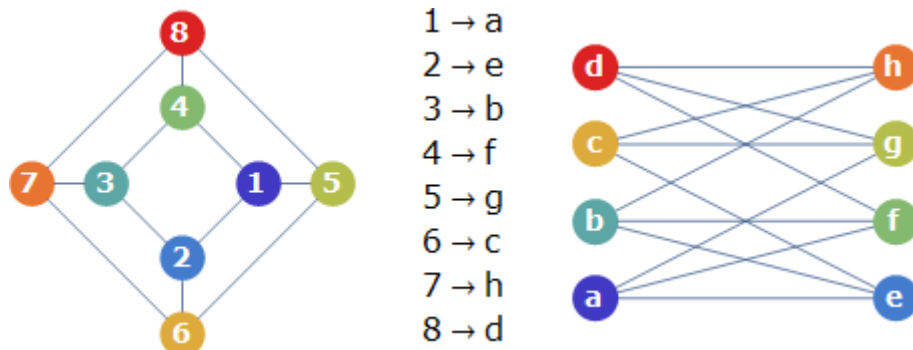
Figura 16 – Acíclico



Fonte: autoria própria

Dois grafos podem apresentar representações visuais totalmente diferentes, mas ainda assim serem o mesmo grafo conforme a definição formal, isto acontece como os grafos conhecidos por isomorfos, são grafos que apesar de suas representações serem diferentes, apresentam uma mesma estrutura (arcos e nós), como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Grafos Isomorfos



Fonte: autoria própria.

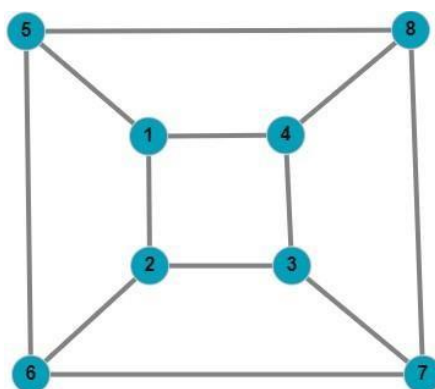
Para se provar que dois grafos são isomorfos, é necessário obedecer aos seguintes critérios:

1. Os dois possuem a mesma quantidade de nós.
2. Os dois possuem a mesma quantidade de arestas.
3. Se um dos grafos apresentar arcos paralelos ou não, no outro também se faz necessário apresentar ou não.
4. Se houver laço em um dos grafos, por consequência pra ser isomorfos é necessário que apareça no outro também.

5. Em relação ao número de nós a quantidade de graus que apresenta deve prevalecer no grafo a ser comparado.
6. Ambos são grafos conexo ou não.
7. Ambos grafos apresentam ciclos ou não.

Pode-se representar um grafo planar em um plano, de maneira que seus arcos se interceptem em nós, como mostra a Figura 18. O matemático Euler foi quem fez a descoberta dos grafos planares, ele nota por meio de suas observações que em um plano um grafo simples e conexo divide-se em regiões limitadas pelos próprios arcos e ilimitadas. É por meio dessas observações que Euler percebeu que existe uma relação entre o “número de nós”, o “número de arcos” e o “número de regiões” de tal grafo.

Figura 18 – Grafo Planar



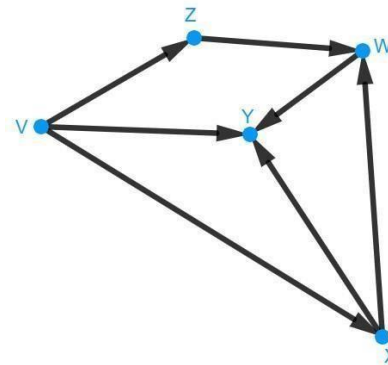
Fonte: autoria Própria.

2.2.1. Dígrafos ou grafos dirigidos

Além do grafo, existe o conceito de dígrafo. A distinção entre os conceitos consiste no fato de que as arestas do grafo são simplesmente formadas por dois vértices, enquanto no dígrafo, as arestas possuem um vértice inicial e um vértice final (arestas dirigidas).

Quando as arestas de um grafo tiverem orientação, este é chamado de grafo dirigido e quando não tiver direção, de grafo não dirigido ou simplesmente grafos. Grafos orientados, ou dígrafos são utilizados quando suas arestas são direcionadas, como é o caso do grafo da Figura 19. Pode-se perceber que as arestas que ligam os vértices têm indicações de onde saem e para onde vão, simbolizando que não é possível fazer o caminho contrário.

Figura 19 - Grafo dirigido

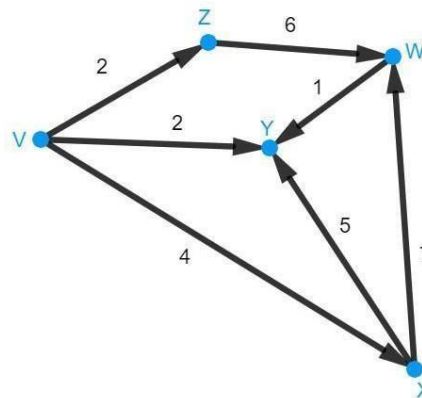


Fonte: autoria própria.

Em grafos orientados, o grau de entrada de um vértice é o número de arestas que entram no respectivo vértice V e é definido por $d^-(v)$, e o de saída é o número de arestas que saem do vértice em direção a outros, definido por $d^+(v)$. O vértice é chamado de fonte quando o grau de entrada é igual a zero e sumidouro quando o grau de saída for a igual a zero.

Os grafos ponderados, são aqueles que além da orientação recebem valores ou pesos para suas arestas, como ilustrado na figura 20.

Figura 20 - Grafo ponderado



Fonte: autoria própria.

2.3. REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS POR MATRIZES OU TABELAS

Nesse modelo de representação criam-se vetores para cada vértice, em que os elementos desses vetores mostram as ligações entre o vértice representado pelo vetor e cada vértice que possui o grafo.

Para representação de grafos, as formas mais comuns são: matriz de adjacências e de incidência.

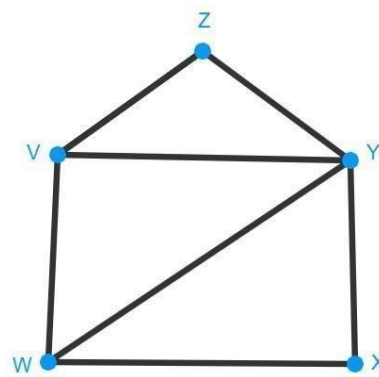
Dado um grafo $(G) = (V, A)$ pode-se obter uma matriz, utilizando um grafo não orientado, obtém-se uma matriz de adjacência.

2.3.1. Matriz de adjacência de grafos não orientados

Uma matriz M de ordem $N \times N$, para um grafo não orientado é tal que:

- $N =$ é número de vértices;
- $M(i, j) = 1$ se existir arestas de i a j ;
- $M(i, j) = 0$ se não existir arestas de i a j .

Figura 21 - Grafo não orientado



Fonte: autoria própria.

Tabela 1 - Para a obtenção da Matriz de adjacência do grafo **não** orientado da figura 21.

	V	W	X	Y	Z
V	0	1	0	1	1
W	1	0	1	1	0
X	0	1	0	1	0
Y	1	1	1	0	1
Z	1	0	0	1	0

Fonte: autoria própria.

Ou em forma matricial $M =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Matriz de adjacência e de incidência de dígrafos.

Utilizando-se um grafo orientado, pode-se obter uma matriz de adjacência e uma matriz de incidência.

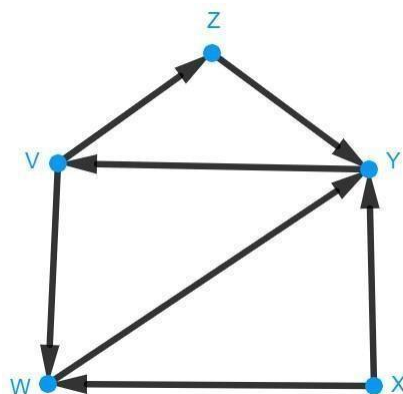
Matriz de adjacência M de ordem $N \times N$, para um dígrafo.

N = ao número de vértices;

$M(i, j) = 1$ se existir arestas de i a j ;

$M(i, j) = 0$ se não existir arestas de i a j .

Figura 22 - Dígrafo (grafo orientado)



Fonte: autoria própria.

Tabela 2 - Para a obtenção da Matriz de adjacência do **dígrafo** da Figura 22.

	V	W	X	Y	Z
V	0	1	0	0	1
W	0	0	0	1	0
X	0	1	0	1	0
Y	1	0	0	0	0
Z	0	0	0	1	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ou em forma matricial $M = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$

2.3.3. Matriz de incidência de dígrafos.

Com uma pequena modificação é possível utilizar a estrutura anterior, para identificar quando uma aresta que incide sobre um vértice converge ou diverge para este vértice.

A matriz de incidência do grafo orientado ou dígrafo, M de ordem $N \times N$, em que N é o número de vértices, é definida como:

- $M(i, j) = +1$ se existir arestas de j até i , isto é, se a aresta converge de j para i ;
- $M(i, j) = -1$ se existir arestas de i até j , isto é, se a aresta diverge de j para i ;
- $M(i, j) = 0$ se não existir arestas de i a j .

Tabela 3 - Para a obtenção da Matriz de incidência do **dígrafo** da Figura 22.

	V	W	X	Y	Z
V	0	+1	0	-1	+1
W	-1	0	-1	+1	0
X	0	+1	0	+1	0
Y	+1	-1	-1	0	-1
Z	-1	0	0	+1	0

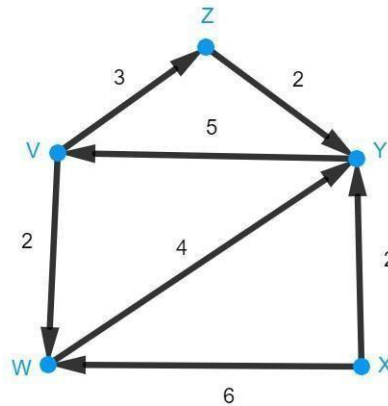
Fonte: autoria própria.

Ou em forma matricial $M = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{+1} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{+1} \\ \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{+1} & 0 \\ 0 & \mathbf{+1} & 0 & \mathbf{+1} & 0 \\ \mathbf{+1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & \mathbf{+1} & 0 \end{bmatrix}$

2.3.4. Matriz de dígrafos valorados.

Grafo valorado é todo grafo que suas arestas apresentam valores. Isto é, em alguns casos os caminhos que ligam os vértices têm valores diferentes uns dos outros, então se deve atribuir valores às arestas do grafo. Nesse caso diz-se que o grafo é um grafo valorado, veja a Figura 23.

Figura 23- Grafo Valorado



Fonte: autoria própria.

Tabela 4 - Para a obtenção da Matriz de incidência do **grafo valorado** referente a figura 23.

	V	W	X	Y	Z
V	0	2	0	0	3
W	0	0	0	4	0
X	0	6	0	2	0
Y	5	0	0	0	2
Z	0	0	0	2	0

Fonte: autoria própria.

Ou em forma matricial $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

As definições apresentadas são os conceitos básicos de grafos

necessários para elucidar os problemas nos quais serão modelados nesse trabalho aplicando teorias.

3. REPRESENTAÇÕES

A representação por meio de esquemas ou diagramas talvez seja a mais usada para grafos, embora não seja apenas isso. Conforme Boaventura e Jurkiewicz (2009) salientam, muitas das vezes, é necessário o uso de computadores para que seja possível resolver problemas com grafos, desta forma, eles não trabalham com desenhos diretamente.

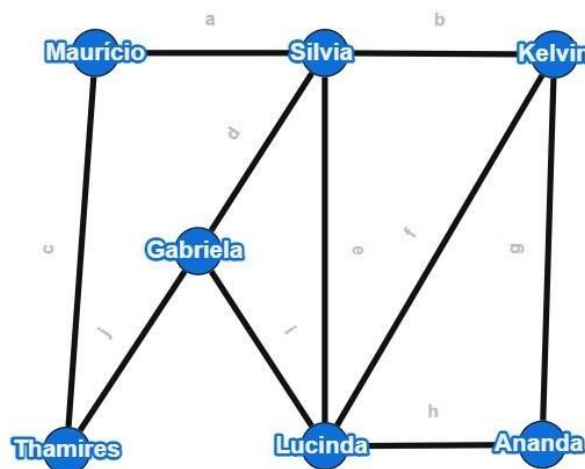
3.1. REPRESENTAÇÕES DE GRAFOS POR ESQUEMAS OU DIAGRAMAS

Na representação por diagramas, pontos são normalmente usados para representar os vértices e segmentos de retas para representar as arestas. Mas, é possível representar os vértices e as arestas de outras formas quando esses diagramas são construídos, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Rede Social

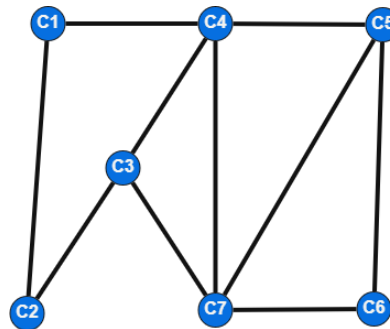
Ananda, Gabriela, Kelvin, Lucinda, Maurício, Silvia e Thamires decidiram construir a representação de suas amizades em uma determinada rede social por meio de um diagrama, foram substituídos os respectivos nomes das pessoas, pelos pontos C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 e C_7 . Nesta situação, as arestas representam quem tem uma amizade pela rede social como mostram as figuras 24 e 25. Quais são os amigos em comum de Gabriela e Kelvin?

Figura 24 – Contatos de uma determinada rede social



Fonte: autoria própria.

Figura 25 – Contatos de uma determinada rede social



Fonte: autoria própria.

Os modelos das Figuras 24 e 25 podem representar os contatos em uma rede social, e em uma delas Ananda, Gabriela, Kelvin, Lucinda, Maurício, Silvia e Thamires foram substituídos pelos respectivos pontos, C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 e C_7 . Nesta situação, as arestas representam quem tem uma amizade pela rede social, tornando simples a determinação de quem são os amigos em comum de Gabriela e Kelvin, ou seja, os vértices que tem ligação com G e K. No esquema, pode-se verificar que L e S são os pontos procurados, o que significa que, Lucinda e Silvia são os amigos em comum que estava-se procurando.

3.1.1. REPRESENTANDO GRAFOS POR CONJUNTOS.

A representação por conjuntos pode ser de grande valia para transportar o problema para um computador, possibilitando a criar algoritmos para sua solução. Nessa representação, a preocupação consiste em criar um conjunto para cada vértice, em que os elementos desse conjunto são os vértices adjacentes, ou seja, vértices que estão ligados por, pelo menos, uma aresta.

Veja como fica o exemplo Rede Social na representação de “conjuntos” (G_i):

- $G_1 = \{C_2, C_4\}$
- $G_2 = \{C_1, C_3\}$
- $G_3 = \{C_2, C_4, C_7\}$
- $G_4 = \{C_1, C_3, C_5, C_7\}$

- $G_5 = \{C_4, C_6, C_7\}$
- $G_6 = \{C_5, C_7\}$
- $G_7 = \{C_3, C_4, C_5, C_6\}$

Nessa representação, a resposta para o exemplo seria a intersecção do conjunto G_4 com o conjunto G_7 , ou seja, os elementos Lucinda e Silvia. É possível também representar os conjuntos de arestas de cada vértice e assim, o exemplo ficaria da seguinte forma:

- $G_1 = \{a, c\}$
- $G_2 = \{c, j\}$
- $G_3 = \{d, j, i\}$
- $G_4 = \{a, b, d, e\}$
- $G_5 = \{b, f, g\}$
- $G_6 = \{g, h\}$
- $G_7 = \{e, f, h, i\}$

Nesse caso, ambas as representações são satisfatórias, apesar de que a solução é mais simples de ser encontrada na primeira representação, quando se representou os conjuntos de cada vértice. Basta uma única intersecção entre dois conjuntos para obter-se a resposta.

4. APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas situações em que existem possíveis situações a serem solucionadas com aplicações de grafos por meio de algoritmos e aplicativos.

4.1. PROBLEMA DO CAMINHO MINIMO

O problema do caminho mínimo consiste em encontrar o menor caminho entre dois nós ou vértices, de forma em que a soma dos valores de suas arestas existentes possa ser minimizada. Assim, resolver este problema pode significar determinar o caminho entre dois vértices com o custo mínimo, ou com o menor tempo de viagem, ou a menor distância.

Por exemplo, um caminhoneiro deseja passar por um caminho mais curto entre dois vértices quaisquer, onde o vértice de origem seja A e o destino seja G, precisa-se analisar o caminho mais curto para passar por todo o percurso de modo que chegue mais rápido no destino, em uma rede qualquer dependendo de seus atributos. Podem existir n caminhos entre um par de vértices determinados como origem e destino e entre os vários caminhos aquele que possui o menor “valor” é chamado de “caminho mínimo”. Este valor representa a soma total dos valores das arestas que compõem o caminho, os quais podem ser representados pelo tempo de viagem, ou pela distância percorrida, ou ainda por um custo qualquer da aresta.

Numa determinada rede, dependendo das suas características, podem existir vários caminhos entre um par de nós, definidos como origem e destino. Este peso representa a soma total dos valores dos arcos que compõem o caminho e estes valores podem ser: o tempo de viagem, a distância percorrida ou um custo qualquer do arco.

O modelo matemático para o problema de caminho mais curto do vértice 1 ao vértice n de um grafo $G = (V, A)$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Variáveis:
 $X_{ij} = \{0, 1\} \rightarrow$ ativação, ou não do arco (i, j) .
- Parâmetros: $C_{ij} =$ custo unitário do fluxo em (i, j) .

$S(j)$ = é o conjunto dos vértices sucessores de j .

$P(j)$ = é o conjunto dos vértices predecessores de j .

- Função objetivo: $min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in S(i)} C_{ij} X_{ij}$.

- Restrições $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in S(1)} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i \in P(n)} x_{in} = 1 \\ \sum_{i \in P(j)} x_{ij} = \sum_{k \in S(j)} x_{jk} \quad ; j = 2; \dots; n - 1 \end{array} \right.$

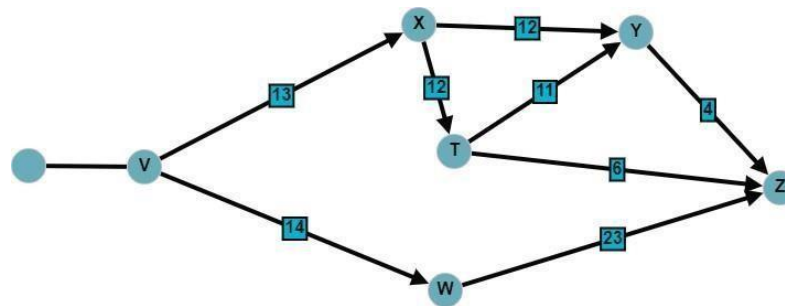
Para resolução do problema de caminho mínimo existem vários algoritmos, dentre eles destaca-se os algoritmos de Dijkstra e de Floyd-Warshal.

O algoritmo de Dijkstra é uma solução para o problema do caminho mínimo de origem única, funciona em grafos orientados e não orientados, no entanto, todas as arestas devem conter apenas custos positivos. O algoritmo de Floyd funciona em grafos ponderados seja ele orientado ou não orientado, e trabalha com pesos (ou valores) positivos e negativos.

4.2. ALGORITMO DE DIJKSTRA

O cientista da computação Edsger W. Dijkstra desenvolveu em 1956, o algoritmo original para encontrar o caminho de custo mínimo entre dois nós ou vértices, dados em um grafo ponderado positivamente, mas uma variante mais comum é fixar um único nó como o vértice de origem e encontrar o caminho mais curto entre ele e qualquer outro vértice em um grafo. A principal ideia do algoritmo de Dijkstra é eliminar continuamente os caminhos mais longos entre o vértice de origem e todos os outros vértices do grafo, cuja maior vantagem é que as distâncias mais curtas de 2 vértices podem ser calculadas em $O(v)$ em vez de $O(3)$, onde v é o número de vértices do grafo.

Figura 26: Exemplo de um Dígrafo valorado



Fonte: autoria própria.

O algoritmo de Dijkstra começa com o vértice selecionado como o vértice de origem e examina todo o grafo para determinar o menor caminho da origem para todos os seus outros vértices. Como os vértices são processados sequencialmente, encontrar os caminhos mais curtos entre eles, é feito como uma operação de relaxamento e a distância entre os vértices será maior ou igual à menor distância calculada. Se começarmos com um vértice, ele terá uma distância de 0 e o vértice restante terá distâncias indefinidas ou infinitas até a fonte. O algoritmo usa os pesos das arestas para encontrar um caminho que minimiza a distância total entre os pesos de um determinado vértice (o vértice de origem) e todos os outros vértices e é só aplicável quando todos os pesos das arestas são positivos, porque durante a execução os pesos são somados para encontrar o caminho mais curto.

Estágios:

- 1º- Marcar todos os vértices como não visitados;
- 2º- marcar o vértice inicial com uma distância atual de **0** e os outros vértices com o símbolo ∞ (infinito);
- 3º- escolher um nó de avaliação do conjunto de nós não visitados, o nó de avaliação deve ser aquele com a menor distância da fonte;
- 4º- calcular novas distâncias para os vizinhos diretos, mantendo a menor distância em cada avaliação;
- 5º- adicionar vizinhos que ainda não foram estabelecidos ao conjunto de nós não visitados.

Essas etapas podem ser divididas em dois processos, Inicialização e Avaliação, a seguir um exemplo de aplicação dessas etapas.

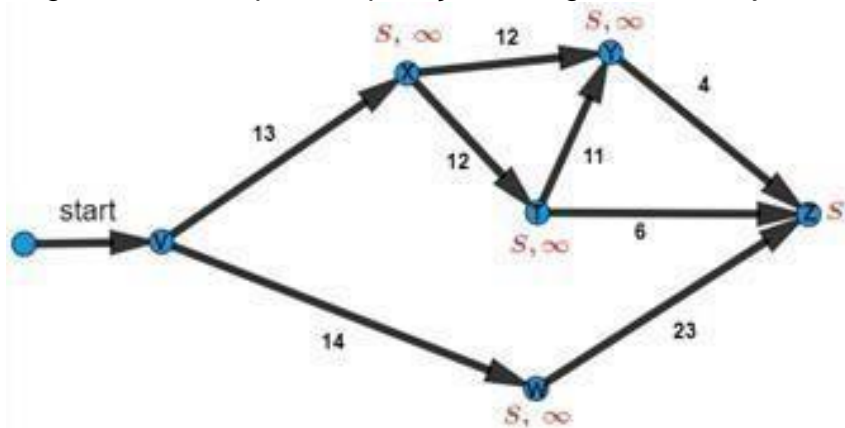
Cálculo do menor caminho com o algoritmo de Dijkstra:

Seja o dígrafo da figura 26:

- Inicialização

Marcar todos os nós com uma distância infinita e um predecessor desconhecido, exceto a fonte. Em seguida atribui-se valor ao nó V (entendemos que a distância do nó V ao nó V é zero), deste modo, cada nó no resto do grafo será distinguido com um predecessor e uma distância, como mostra a figura 27.

Figura 27- Exemplo da aplicação do algoritmo de Dijkstra: 1º passo



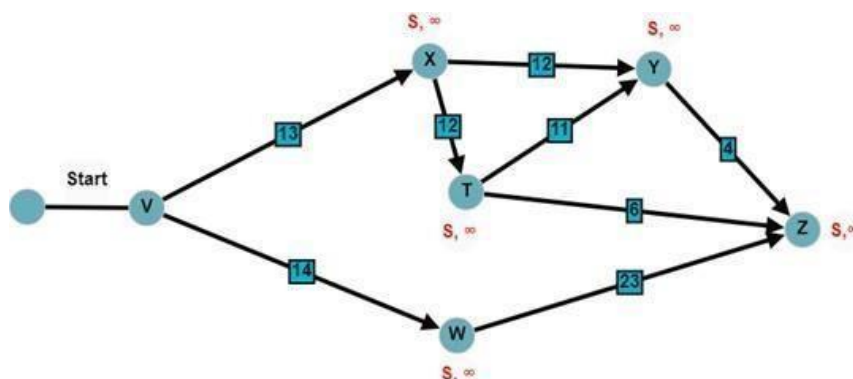
Fonte: autoria própria.

Para finalizar o processo da Inicialização, precisamos adicionar o nó V aos nós não definidos dispostos a serem visitados primeiro na etapa da avaliação.

Avaliação

Nesta etapa o grafo já foi inicializado, escolhe vértices com a menor distância do conjunto não selecionado e, em seguida, avaliamos todos os vértices adjacentes que não foram selecionados. No caso a seguir estamos calculando a menor distância do vértice V ao vértice Z , onde o vértice V é nosso vértice de início, pois possui a menor distância, como mostrar a figura 28.

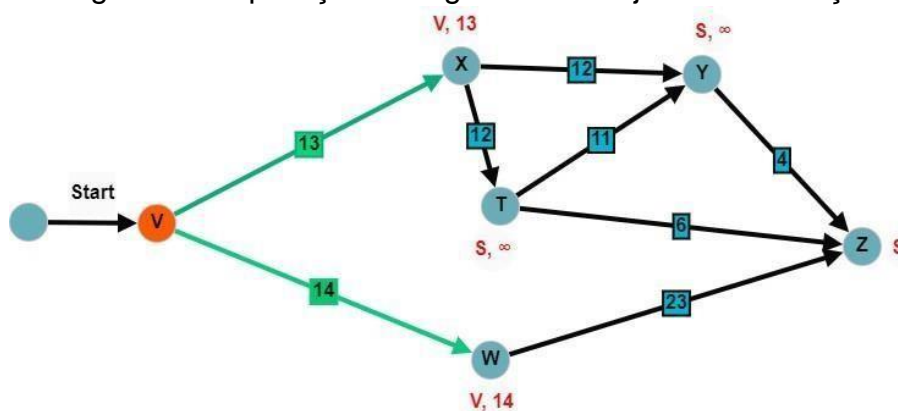
Figura 28- Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração



Fonte: autoria própria.

O conceito é adicionar o peso da aresta à distância do vértice de avaliação e, em seguida, compará-lo com a distância do destino. Por exemplo, para o vértice X, $0 + 13$ é menor que infinito, então a nova distância para o vértice X é 13, e o novo predecessor é V, o mesmo se aplica ao nó W, pois $0 + 14$ é menor que infinito, então a nova distância de W é 14 e seu predecessor é V, como na figura 29.

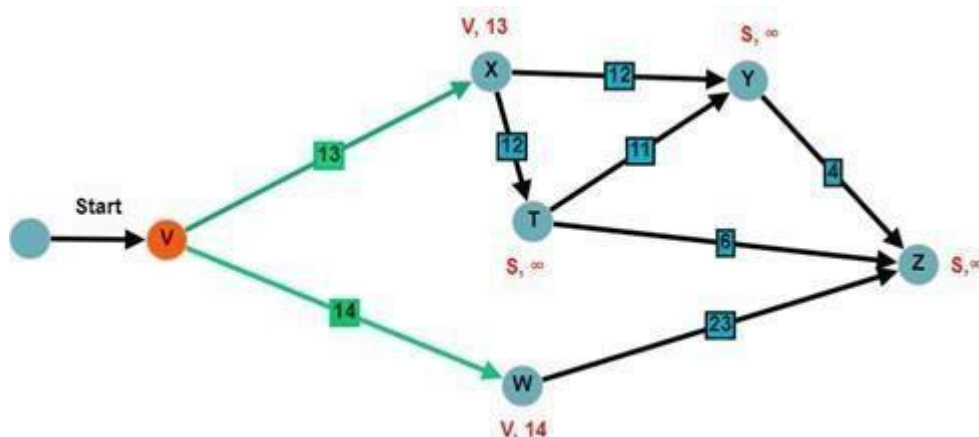
Figura 29 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração



Fonte: autoria própria.

Ao ser feita a primeira iteração nota-se que a menor distância dos vértices analisando-se é de $V \rightarrow X$, então X passará a ser o nosso predecessor e a partir do mesmo analisa-se outros vértices do conjunto não visitados, já que a partir do X temos a possibilidade de dois caminhos $X \rightarrow T$ e $X \rightarrow Y$. A segunda iteração é calcular o menor caminho dentre os caminhos dispostos, que são $X \rightarrow Y$ e $X \rightarrow T$, ao calcular é notório que a distância de ambos são a mesma resultando em 25 a distância, como mostra a figura 30.

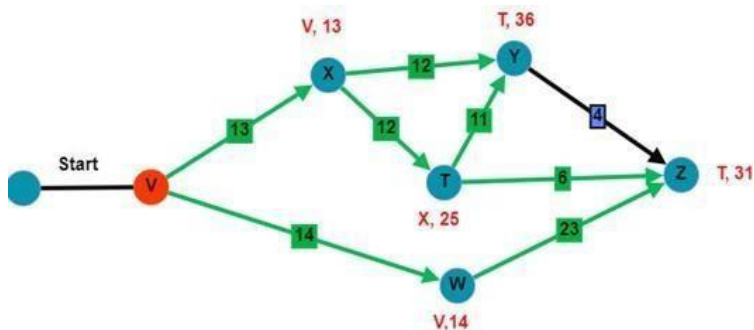
Figura 30- Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração



Fonte: autoria própria.

Na terceira iteração será analisado o vértice W e o caminho disposto a partir do mesmo, se sua distância for menor do que 25, logo o menor caminho de $V \rightarrow Z$ foi encontrado, se a distância for maior que 25 é necessário retornar ao vértice com a menor distância encontrada anteriormente e calcular uma nova rota. Ao se calcular a distância do vértice W, $14 + 23$ resultando é 37, $37 > 25$ sendo assim sua distância é maior do que a distância calculada anteriormente, portanto é necessário retornar a vértice com a menor distância e calcular uma nova rota, de acordo com a figura 31.

Figura 31- Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 3ª iteração

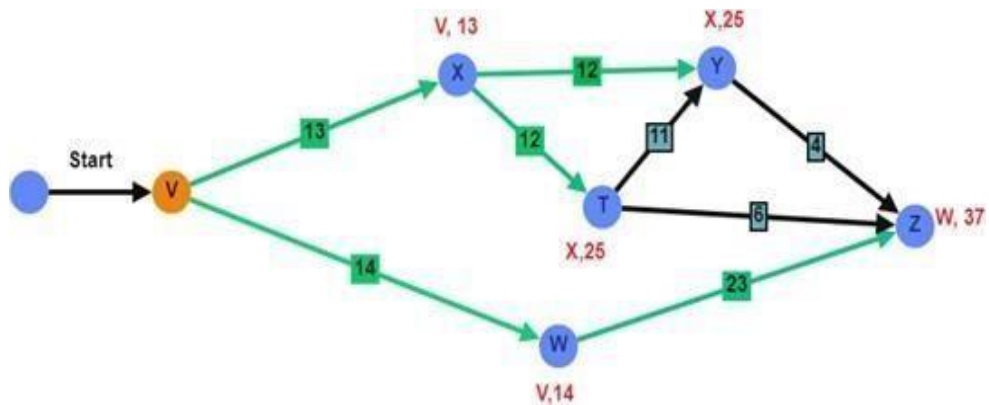


Fonte: autoria própria.

Na quarta iteração pode ser analisados novas rotas partindo tanto de Y como de T, pois suas distâncias são equivalentes. Sendo T nosso predecessor temos a possibilidade de dois caminhos, um que vai de T diretamente a nosso ponto de destino(Z) e outro que tem como parada o vértice

Y. Ao calcular $T \rightarrow Z$ encontra-se uma distância maior que 25, pois para o vértice Z, $25 + 6$, resultando em 31, $31 > 25$, portanto é necessário ainda buscar por uma nova rota. Ao se calcular $T \rightarrow Y$ também é encontrado uma distância maior do que 25, pois para Y, $25 + 11$, resultando em 36, $36 > 25$, sendo assim só nos restas calcular a distância de $Y \rightarrow Z$ e avaliar se a iteração pois o menor caminho do grafo.

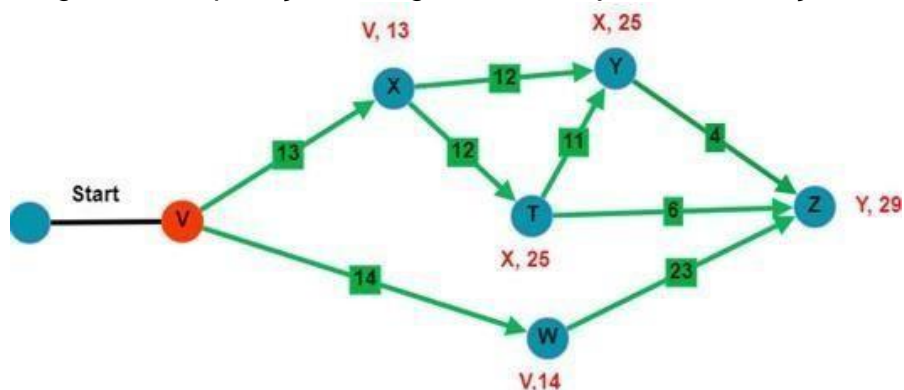
Figura 32- Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 4ª iteração



Fontes: autoria própria.

Na quinta iteração verificamos por fim o único vértice ainda não visitado, será usado o menor caminho encontrado até Y, que no caso é 25 tendo X como se predecessor. Com isto pode-se calcular de $Y \rightarrow Z$, pois para o vértice Z, $25 + 4$ resultando em 29, sendo assim o menor caminho encontrado do ponto V até Z, como mostra a figura 33.

Figura 33 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 5ª iteração



Fonte: autoria própria.

Em seguida constrói-se uma tabela que mostra todas as iterações que foram realizadas no processo de avaliação.

Tabela 5 - Tabela de Iterações

Iteração	Não Resolvidos	Assentou	Nó de avaliação	V	W	X	Y	T	Z
1	V	-	V	0	V-14	V-13	V-∞	V-∞	V-∞
2	X, W	V	X	0	V-14	V-13	X-25	X-25	V-∞
3	W, Y, T	V, X	W	0	V-14	V-13	X-25	X-25	T-37
4	T, Z, Y	V, X, W	T	0	V-14	V-13	T-36	X-25	T-31
5	Y, Z	V, X, W, T	Y	0	V-14	V-13	T-36	X-25	Y-29
6	Z	V, X, W, T, Y	Z	0	V-14	V-13	T-36	X-25	Y-29
FINAL	-	TUDO	NENHUM	0	V-14	V-14	T-36	X-25	Y-29

Fonte: autoria própria.

A notação X-25, por exemplo significado que no vértice X é o predecessor imediato com uma distância total de 25 do vértice V. Por fim pode-se calcular os caminhos mais curtos do vértice A que são os seguintes:

- Vértice X: $V \rightarrow X$ a distância total é 13;
- Vértice W: $V \rightarrow W$ a distância total é 14;
- Vértice T: $V \rightarrow X \rightarrow T$ a distância total é 25;
- Vértice Y: $V \rightarrow X \rightarrow T \rightarrow Y$ a distância total é 25;
- Vértice Z: $V \rightarrow X \rightarrow T \rightarrow Y \rightarrow Z$ a distância total é de 29;

4.3. ALGORITMO DE FLOYD- WARSHALL

O algoritmo de Floyd-Warshall é usado para encontrar o par de caminhos mais curtos de um vértice em um grafo até uma borda do grafo, tendo ele valores positivos ou negativos, supondo que o caminho T (Q1, Q2, Qj) seja o caminho minimamente ponderado do vértice Q ao vértice J. Os pontos intermediários são extraídos de um subconjunto de vértices (1, 2, ...k) e o algoritmo funciona examinando os pares de caminhos, usando cada vértice como um ponto intermediário.

O intuito deste algoritmo é averiguar a cada iteração se a inclusão de um vértice k intermediário no percurso de i para j pode diminuir o tamanho de um percurso já determinado.

O algoritmo de Floyd-Warshall é responsável por calcular o menor

caminho por meio de todos os pares de vértices em um grafo valorado e orientado. Floyd-Warshall foi propagado pelo informático Robert Floyd em 1966, este algoritmo é o mesmo que foi publicado por Bernard Roy em 1959, e por Stephen Warshall em 1962 a fim de determinar o desfecho transitivo de um grafo. O formato atual do algoritmo com três *loops* de repetição foi descrito por Peter Ingerman em 1962.

A aplicação do algoritmo ocorre somente no centro de um grafo, e na mediana.

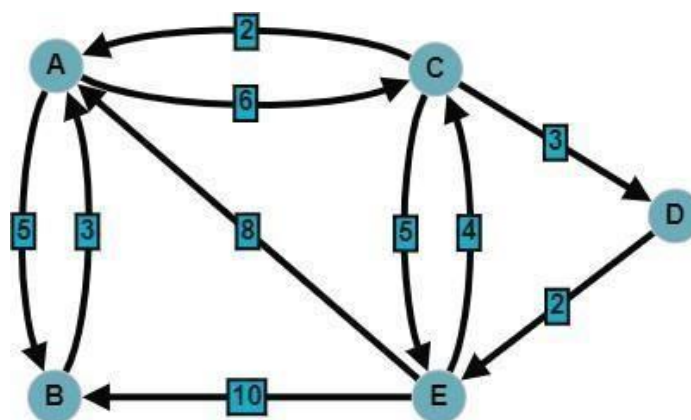
Estruturas do Algoritmo

- Numere os vértices do grafo;
- Defina a matriz inicial (D^0) cujos valores d^{0ij} sejam correspondentes aos valores das arestas i,j se existir arestas no grafo, caso contrário considere $d_{ij} = \text{infinito}$, pois pode existir infinitas maneiras formas de solucionar, e faça os elementos da diagonal da matriz $d_{ii} = 0$ para todo i ;
- Para cada $k = n$, determine sucessivamente os elementos da matriz D_k , a partir dos elementos da matriz D_{k-1} , utilizando a expressão 1.

$$D_{ijk} = \min \{d_{jk-1}, d_{ijk-1}\} \quad (1)$$

Exemplo da aplicação para cálculo do menor caminho com o algoritmo de Floyd-Warshall

Figura 34- Exemplo de Dígrafo valorado para cálculo do menor caminho com o algoritmo de Floyd-Warshall.



Fonte: autoria própria.

1ª Etapa: Construa a matriz de **DISTÂNCIA**, com as respectivas distâncias.

$$M^0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

2ª Etapa: Construa a matriz M^1

- Para construção de M^1 , repetir somente os valores da linha A, da coluna A e a diagonal da matriz M^0 .
- Com isto na matriz M^1 , verifica-se que faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores terá que ser feita a seguinte verificação:

$$D_{ij} > D_{ik} + D_{kj}$$

→ {se for verdade a afirmação, então $D_{ij} = D_{ik} + D_{kj}$

se Não, mantem – se o valor

- K, sempre será a linha e a coluna que se está analisando, por exemplo na matriz M^1 nosso K= A (linha A ; coluna A), na matriz M^2 o K será = B (linha B ; coluna B) e assim sucessivamente.

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & & & \\ 2 & & 0 & & \\ \infty & & & 0 & 2 \\ 8 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Resolução:

- para se calcular a célula BC (linha B ; coluna C)

$$D_{bc} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ba} = 3 \text{ e } D_{kj} = D_{ac} = 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{bc} > D_{ba} + D_{ac} \\ \infty > 3 + 6 \\ \infty > 9 \text{ sim, então o novo valor de } D_{bc} \text{ será } 9 \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula BD (linha B ; coluna D)

$$D_{bd} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ba} = 3 \text{ e } D_{kj} = D_{ad} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{bd} > D_{ba} + D_{ad} \\ \infty > 3 + \infty \\ \infty > 3 + \infty ? \text{ Não , então o valor de } D_{bd} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula BE (linha B ; coluna E)

$$D_{be} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ba} = 3 \text{ e } D_{kj} = D_{ae} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{be} > D_{ba} + D_{ae} \\ \infty > 3 + \infty \\ \infty > 3 + \infty ? \text{ Não , então o valor de } D_{be} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CB (linha C ; coluna B)

$$D_{cb} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ca} = 3 \text{ e } D_{kj} = D_{ab} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{cb} > D_{ca} + D_{ab} \\ \infty > 2 + 5 \\ \infty > 7 ? \text{ Sim , então o valor de } D_{cb} \text{ será } 7, \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CD (linha C ; coluna D)

$$D_{cd} = 3 \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ca} = 2 \text{ e } D_{kj} = D_{ad} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{cd} > D_{ca} + D_{ad} \\ 3 > 2 + \infty \\ 3 > 2 + \infty ? \text{ Não , então o valor de } D_{cd} \text{ se mantém, isto é, } 3 \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CE (linha C ; coluna E)

$$D_{ce} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ca} = 2 \text{ e } D_{kj} = D_{ae} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{ce} > D_{ca} + D_{ae} \\ \infty > 2 + \infty \\ \infty > 2 + \infty ? \text{ Não , então o valor de } D_{ce} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DB (linha D ; coluna B)

$$D_{db} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{da} = \infty \text{ e } D_{kj} = D_{ab} = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{db} > D_{da} + D_{ab} \\ \infty > \infty + 5 \\ \infty > \infty + 5 ? \text{ Não , então o valor de } D_{db} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DC (linha D ; coluna C)

$$D_{dc} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{da} = \infty \text{ e } D_{kj} = D_{ac} = 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{bd} > D_{ba} + D_{ad} \\ \infty > \infty + 6 \\ \infty > \infty + 6? \text{ Não, então o valor de } D_{dc} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DE (linha D ; coluna E)

$$D_{de} = 2 \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{da} = \infty \text{ e } D_{kj} = D_{ae} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{de} > D_{da} + D_{ae} \\ 2 > \infty + \infty \\ 2 > \infty + \infty? \text{ Não, então o valor de } D_{de} \text{ se mantém, isto é, } 2 \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula EB (linha E ; coluna B)

$$D_{eb} = 10 \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ea} = 8 \text{ e } D_{kj} = D_{ab} = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{eb} > D_{ea} + D_{ab} \\ 10 > 8 + 5 \\ 10 > 13? \text{ Não, então o valor de } D_{eb} \text{ se mantém, isto é, } 10 \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula EC (linha E ; coluna C)

$$D_{ec} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ea} = 8 \text{ e } D_{kj} = D_{ac} = 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{ec} > D_{ea} + D_{ac} \\ \infty > 8 + 6 \\ \infty > 14? \text{ Sim, então o valor de } D_{ec} \text{ será } 14 \text{ em } M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula ED (linha E ; coluna D)

$$D_{ed} = \infty \text{ e } K=A$$

$$D_{ik} = D_{ea} = 8 \text{ e } D_{kj} = D_{ad} = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} D_{ed} > D_{ea} + D_{ad} \\ \infty > 8 + \infty \\ \infty > 8 + \infty? \text{ Não, então o valor de } D_{ed} \text{ se mantém, isto é, } \infty \text{ em } M^1 \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

3ª Etapa: Construir a matriz M^2

- Para construção de M^2 , repetir somente os valores da linha B, da coluna B e a diagonal da matriz M^0 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & & & \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ & 7 & 0 & & \\ \infty & & & 0 & 2 \\ 10 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^2 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

$$D_{ij} > D_{ik} + D_{kj} \rightarrow \begin{cases} \text{se for verdade a afirmação, então } D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ \text{se Não, mantém - se o valor} \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^2 o K será sempre = B (linha B ; coluna B) .

Realizando os cálculos de forma análoga na construção da M^1 obtém-se:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

4ª Etapa: Construir a matriz M^3

- Para construção de M^3 , repetir somente os valores da **linha C**, da **coluna C** e a **diagonal da matriz M^0** .

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & & 6 & & \\ & 0 & 9 & & \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ & & \infty & 0 & \\ & & 4 & & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^3 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverá ser feita a verificação:

$$D_{ij} > D_{ik} + D_{kj} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{se for verdade a afirmação, então } D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ \text{se Não, mantem – se o valor} \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^3 o K será sempre = C (linha C ; coluna C) .

Realizando os cálculos de forma análoga na construção M^1 obtém-se:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

5ª Etapa: Construir a matriz M^4

- Para construção de M^4 , repetir os valores da **linha D**, da **coluna D** e a **diagonal da matriz M^0** .

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & & & 9 & \\ & 0 & & 18 & \\ & & 0 & 3 & \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ & & & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^2 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverá ser feita a verificação:

$$D_{ij} > D_{ik} + D_{kj} \ominus$$

$$\begin{cases} \text{se for verdade a afirmação, então } D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ \text{se Não, mantem – se o valor} \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^2 o K será sempre = D (linha D ; coluna D) .

Realizando os cálculos de forma análoga na construção M^1 obtém-se \square

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

6ª Etapa: Construir a matriz M^5

- Para construção de M^5 , repetir somente os valores da **linha E**, da **coluna E** e a **diagonal da matriz M^0** .

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 11 \\ & 0 & & & 14 \\ & & 0 & & 5 \\ & & & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^5 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

$$D_{ij} > D_{ik} + D_{kj} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se for verdade a afirmação, então } D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ \text{se Não, mantem - se o valor} \end{array} \right.$$

- K, sempre será a linha e a coluna que se está analisando, na matriz M^5 o K será sempre = E (linha E ; coluna E) .

Realizando os cálculos de forma análoga na construção para M^1 obtém-se:

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ 16 & 16 & 10 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa M^5 é a matriz que fornece o menor caminho entre todos os vértices pelo **Algoritmo de Floyd-Warshall**, que pode ser melhor representada pela tabela 6, a seguir:

Tabela 6: Fornece o menor caminho entre todos os vértices pelo **Algoritmo de Floyd-Warshall**

	A	B	C	D	E
A	0	5	6	9	11
B	3	0	9	18	14
C	2	7	0	3	5
D	16	16	10	0	2
E	6	10	4	7	0

Fonte: autoria própria.

O Algoritmo de Floyd-Warshall é um algoritmo que utiliza a recursão que é um método de resolução de problemas que envolvem desdobrar um problema em sub-problemas menores e assim sucessivamente até chegar a um problema elementar, o suficiente para que este possa ser resolvido facilmente.

4.4. SOFTWARE E APLICATIVOS

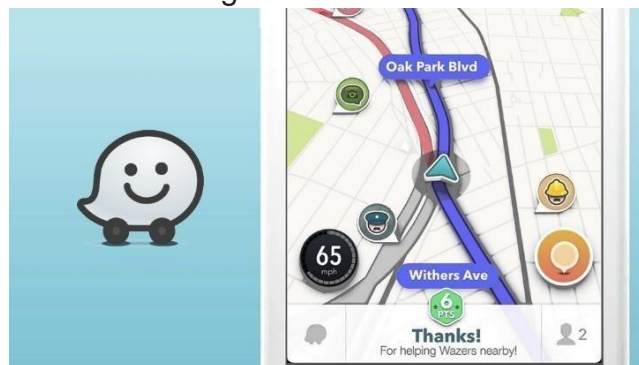
São apresentados alguns dos softwares e aplicativos que estão integrados em nosso dia a dia e a dependência de ambos para várias realizações de atividades, torna-se cada vez, maior.

4.4.1. Waze

O aplicativo Waze faz uso de dados enviados em tempo real de seus usuários, para analisar assim o caminho (o trajeto) mais curto entre dois pontos.

Waze é um aplicativo disponível de forma gratuito para Android e iOS, tem uma interface amigável que facilita a execução para os usuários, como mostra a Figura 35. O aplicativo faz uso de dois elementos principais: a Teoria dos Grafos e o Algoritmo A*.

Figura 35 - Waze



Fonte: <https://assets.b9.com.br/wp-content/uploads/2015/10/waze.jpg>

O Algoritmo trata de uma busca do menor caminho possível, baseando-se em grafos. Em um mapa, os nós são os pontos de origem e o destino de uma rota, enquanto os arcos são as possíveis rotas. Para que o Waze possa descobrir o menor caminho, atribui-se pesos para cada uma delas, tendo como base informações recebidas em tempo real dos usuários do aplicativo, órgãos de trânsito e entre outras fontes. O peso serve para determinar o tempo levado para concluir aquele caminho, é aqui onde entra a aplicação do Algoritmo A*.

4.4.2. Matemática Multimídia (Hub)

É uma plataforma online, que nasceu por meio de uma chamada de um Edital do MEC e MCT que buscava desenvolvedores e produtores de recursos educacionais por meio das mídias digitais em 2007, atualmente é conhecido por CONDIGITAL. Todos os recursos que a plataforma apresenta foram desenvolvidos por vários profissionais de várias áreas em aproximadamente quatros anos, como mostra a Figura 35. Em 2010 e 2011 os recursos que a plataforma oferecia começam a ser publicado na internet, tanto como neste portal como no Youtube e em canais parceiros.

Figura 35 – Matemática Multimídia



Fonte: <https://img.yumpu.com/12765036/1/500x640/versao-para-tela-matematica-multimidiaunicamp.jpg>

A plataforma ganha força em 2011, pois por meio dela o Governo do Estado de São Paulo, ofereceu aos professores de Educação Pública Estadual cursos para que pudessem utilizá-los de forma integrada ao currículo oficial do Estado, além disso os professores puderam conhecer o M3, além dos cursos que foram oferecidos, também foram oferecidos oficinais, cursos de extensão e palestras preparadas pelos próprios desenvolvedores da plataforma.

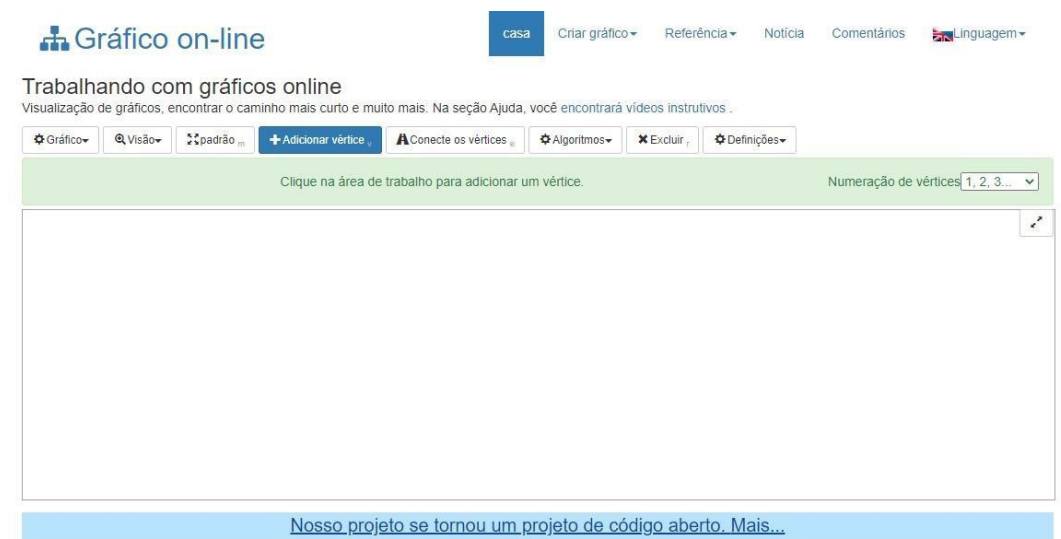
Em uma das ferramentas disponibilizados pelo software, ele permite que o usuário faça exploração da teoria dos grafos, por meio de uma atividade que tem como base Hub de aviões de uma cidade para outra. Dentro do mesmo é possível realizar atividades que apresenta dados conceitos

básicos do conteúdo isto permite que o aluno possa se familiarizar com os conteúdos e ao mesmo tempo exercícios mais complexos que vai precisar de conceitos avançados para que possa ser solucionado.

4.4.3. GraphOnline

Graphonline é um site que permite que o usuário visualize e crie grafos. Na plataforma é possível aplicar algoritmos nos grafos desenvolvidos como o de Dijkstra, Floyd-Warshall, entre outros, possível visualizar as matrizes de adjacência, fazer busca pelo menor caminho. A plataforma é de acesso gratuito e como seu layout simples facilita que o usuário faça uso, como mostra a Figura 36.

Figura 36 – Graphonline



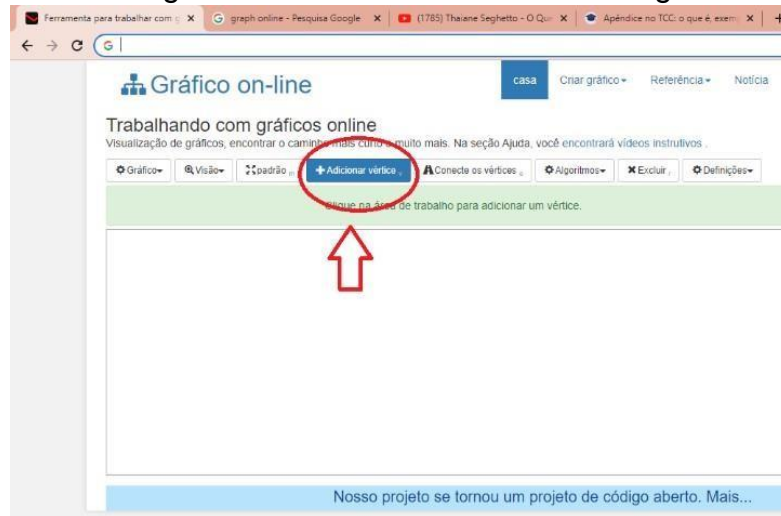
Fonte: <https://graphonline.ru/>

Como faço para criar um determinado grafo?

Ao acessar a plataforma de forma online o usuário já se depara com a tela de início, como mostrado na Figura 36. Para gerar um grafo basta apenas utilizar as ferramentas que estão disponíveis na barra de recursos da plataforma.

O primeiro ponto a se definir são os vértices (nós) do grafo, para isto é necessário clicar na ferramenta “adicionar um vértice” com mostra a Figura 37.

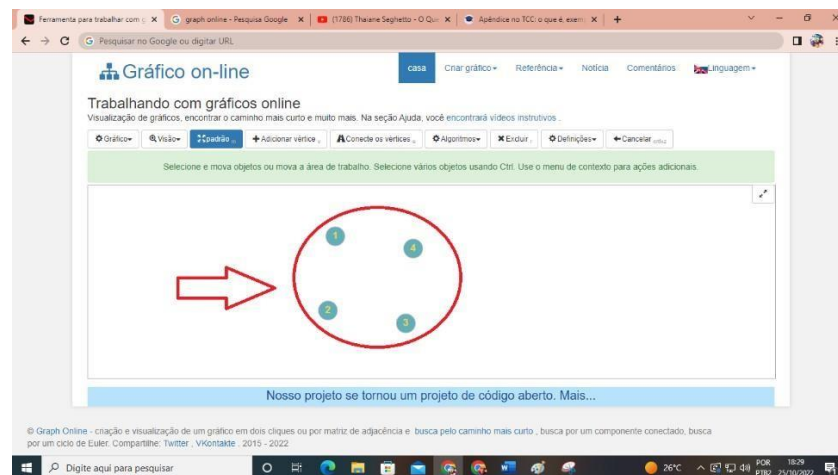
Figura 37 – Adicionando vértices ao grafo.



Fonte: autoria própria

Em seguida, é possível adicionar quantos “vértices” forem necessários para a construção de um determinado grafo. No exemplo a seguir adicionou-se quatros vértices, como mostra a Figura 38.

Figura 38 – Adicionando aresta ao grafo



Fonte: autoria própria

Pode-se também introduzir “arestas” para conectar os nós dos grafos, nesta etapa é necessário utilizar a ferramenta conectar vértices, onde é possível adicionar peso para esta aresta e dar a opção de aresta direcionadae ou não direcionada, como mostra as Figuras 39 e 40.

Figura 39 – Definição para aresta de um grafo.

Fonte: autoria própria

Figura 40 – Adicionando aresta no grafo.

Fonte: autoria própria

As etapas citadas anteriormente são as etapas básicas para criação do grafo, mais ainda é possível “trocar o nome dos vértices”, “adicionar nome as arestas”, “gerar matrizes” e “fazer” aplicações de algoritmos” disponibilizados na plataforma.

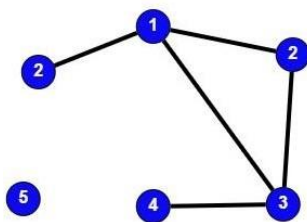
5. PROPOSTAS E DISCUSSÃO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO.

Nesta etapa, o intuito do trabalho é voltado para os estudantes do Ensino Médio das escolas estaduais, na qual sugere-se uma proposta de atividades sobre a teoria de grafos, de acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), abrangendo conceitos sobre conjuntos, matrizes, determinantes e resolução de problemas, nas quais os discentes deverão interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos apresentados em teoria.

5.1. PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Propostas de Atividades

- 1- Construa um grafo simples direcionado e outro não direcionado.
- 2- Construa um grafo com os seguintes graus:
(3,3,3,2,2,1,1,1,0)
- 3- Construa um grafo com as seguintes características:
 - a) Simples com 5 nós e pelo menos dois nós com grau 2.
 - b) 4 nós e ciclos de comprimento 1, 2, 3 e 4;
 - c) não completo com 4 nós, cada um com grau 4
- 4- Considere o Grafo a seguir e responda:



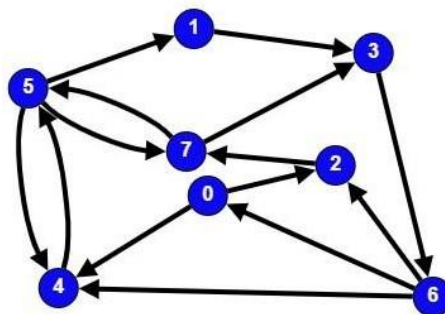
- a) O grafo é simples?
- b) O grafo é conexo?

- c) O grafo é completo?
- d) É possível obter um ciclo por meio deste grafo?

5- Construa uma malha aérea pequena, mas que ainda assim atenda às exigências de um país, é um grande desafio. Tente montar a menor malha possível para um país com aeroportos em 9 cidades, e cuja forma seja tal que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, três voos.

6- Construa uma malha para o país abaixo de tal modo que todas as cidades estejam conectadas por, no máximo, três voos. Porém, como as cidades A e I, C e H, e B e G estão muito distantes uma da outra, as viagens entre elas devem ser feitas com, pelo menos, dois voos

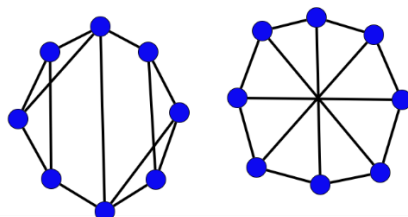
7- Observe o grafo direcionado a seguir e responda às questões:



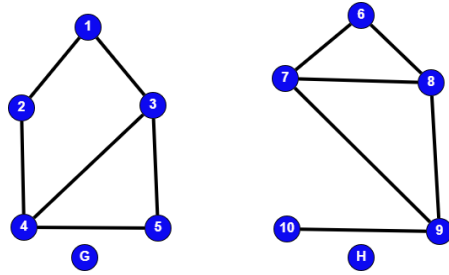
- a) Existe um caminho de comprimento 4 do nó 2 para 4?
- b) De quantas maneiras possíveis partido do nó 2 consigo acessar o nó 5?

8- Observe os pares de grafos a seguir e verifique se são grafos isomorfos.

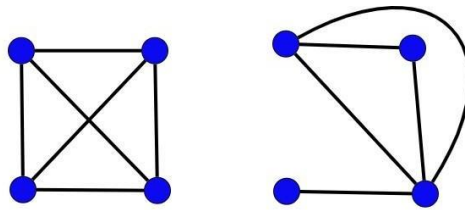
a)



b)

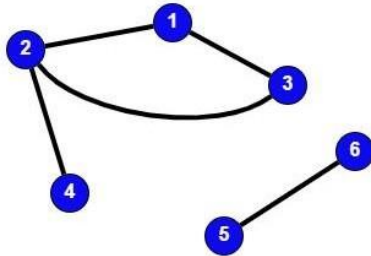


c)

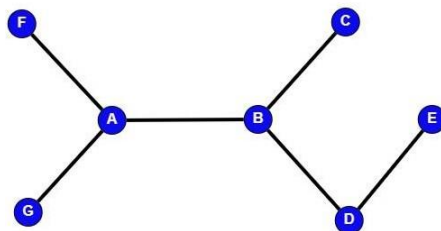


9- Construa a matriz de adjacência dos grafos a seguir:

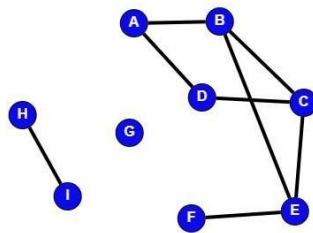
a)



b)



c)



10-

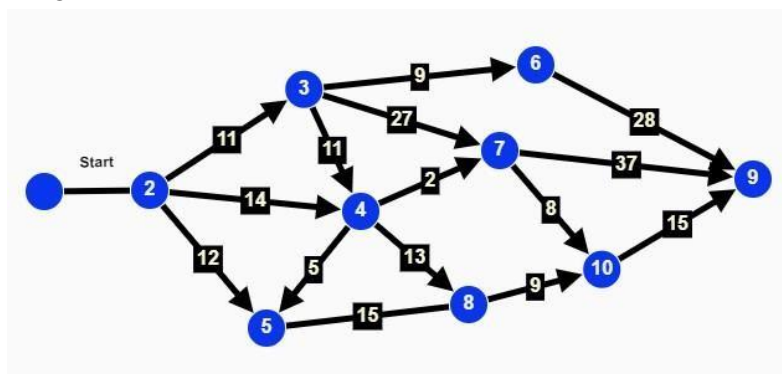
Dadas as matrizes a seguir, façam as construções do grafo.

a)
$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

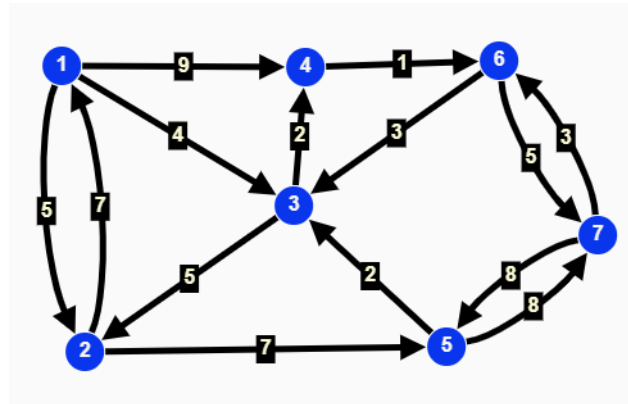
b)
$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os exercícios 11 e 12 deverão ser resolvidos com a utilização dos Graphonline. Observe os grafos desenhados nos exercícios e reproduzam de forma literal os mesmos no Graphonline e após isto respondam as questões.

11-Dado o grafo a seguir, utilize o Algoritmo Dijkstra e calcule o menor caminho.

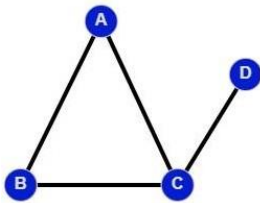


12-Dado o Grafo a seguir, faça o uso do Algoritmo de Floyd-Warshall para encontrar o menor caminho.

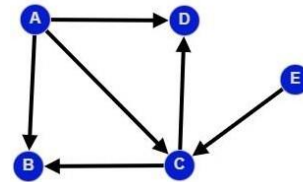


5.2. POSSÍVEIS RESOLUÇÕES

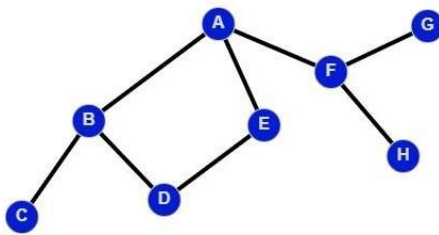
1- a)



b)

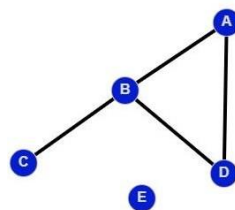


2-

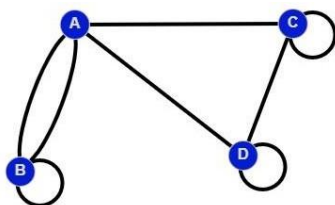


3-

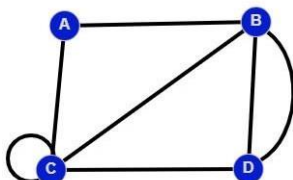
a)



b)



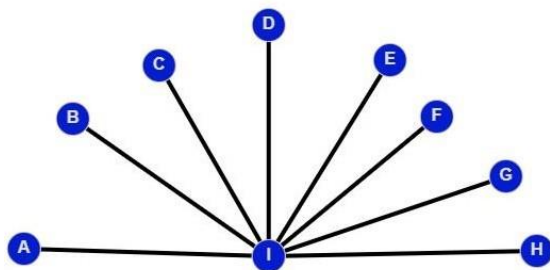
c)



4-

- a) Sim
- b) Não
- c) Não
- d) Sim. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

5-



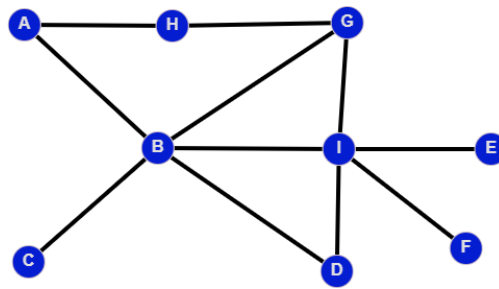
6-

7-

- a) Sim. $2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4$
- b) 2 maneiras.

8-

- a) Não, pois há correspondência entre os números de vértices e arestas, mas relação de grau por vértice não permaneceu a mesma.



- b) Não, pois há correspondência entre os números de vértices e arestas, mas relação de grau por vértice não permaneceu a mesma.
- c) Não, pois há correspondência entre os números de vértices e arestas, mas relação de grau por vértice não permaneceu a mesma.

9-

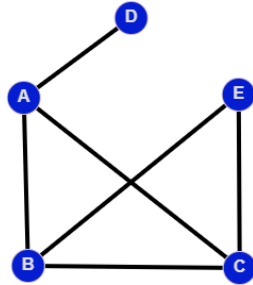
a)
$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

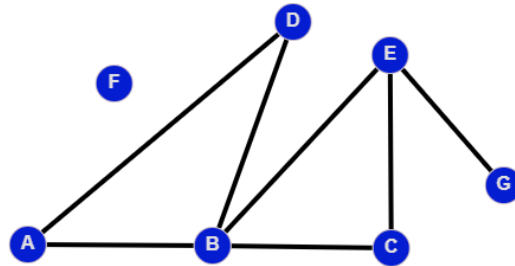
c)
$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10-

a)



b)



Observação: Os exercícios 11 e 12 devem ser desenvolvidos por meia da plataforma Graphonline.

5.3. DISCUSSÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Nos exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, espera-se que os alunos desenvolvam os conceitos de Teoria do Grafos tais como: grafos simples, grafo direcionados, grafos complexos e completos, ciclo e acíclico, entres outros conceitos básicos da Teoria de Grafos, assim permitido que façam as construções e respondam perguntas objetivas sobre Grafo. Já no exercício 8, é proposto ao aluno que demonstre o que aprendeu sobre grafos isomorfos.

Nos exercícios 9 e 10, criam que os alunos relacionem grafos e matrizes e a partir disso, criar por meio das matrizes um grafo e por meio do grafo sua matriz.

Os exercícios 11 e 12, envolvem o conceito de caminho mínimo por meio dos algoritmos de Dijkstra e de Floyd-Warshall. Apesar do objetivo de

ambos os exercícios serem o mesmo, os algoritmos trabalham de maneira distinta, permitindo que sejam desenvolvidos conceitos diferentes.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Compreender que a interpretação de um problema pode ser transcrita por meio de uma modelagem antes de encontrar sua solução, nesse caso a utilização de um desenho (grafo) para modelar problemas amplia o conhecimento do aluno e oferece ferramentas adequadas para tomada de decisões na busca de uma solução, a qual pode ser obtida manualmente ou com o auxílio de um computador com novas oportunidades de aprendizagem até mesmo em outras disciplinas e assuntos que não sejam a Matemática.

As propostas de atividades levantam a possibilidade da teoria dos grafos ser inserida complementarmente em alguns conteúdos, como conjuntos ou matrizes. Tendo em vista, as aplicações de grafos e a importância de seu uso em determinadas áreas, desde o tradicional problema das sete pontes de Königsberg, até mesmo com o encontro do mesmo em menores caminhos, acredita-se que a modelagem de um problema em grafos propicia aos alunos o pensar, entender o abstrato e a inferir sobre várias proposições colocadas tornando-se uma técnica ou procedimento capaz de ajudá-lo a tomar decisões mais adequadas para resolver inúmeros problemas.

REFERÊNCIAS

A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos educacionais digitais / Flavia Fernanda Favaro. - Rio Claro, 2017. Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Aplicações da Matemática: Redes Sociais, Jogos, Engenharia, Profo Fábio Protti (IC-UFF/RJ).

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo. Editora Edgard Blucher Ltda, 2003.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo / JURKIEWICZ, Samuel. Grafos: Introdução e prática. - São Paulo. Editora Edgard Blucher, 2009.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza e Matemática e suas tecnologias. MEC. 2000.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. Base Nacional Curricular Comum: educação é a base. Brasília: MEC; SEB, 2017.

CAMINHOS e ciclos em grafos. [S. l.], 8 abr. 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/paths-andcycles.html. Acesso em: 17. mai 2022.

CONCEITO Básicos da Teoria de Grafos. Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>. Acesso em: 14 set.2021.
DA SILVA, Luiz Fernando. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO¹. Curso de Especialização em M, Mídias Digitais, e didática para educação Básica matemática, p. 1-27.

EXERCÍCIOS de Teoria dos Grafos. [S. l.], 27 set. 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>. Acesso em: 6 out. 2021.

EXERCÍCIOS de Teoria dos Grafos. [S. l.], 27 set. 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>. Acesso em: 6 out. 2022.

GERSTING. Judith L., 1940- Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta / Judith L. Gersting : tradução Valéria de Magalhães Lório.- [Reimpr.]. - Rio de Janeiro: LTC, 2014.

GRAFOS (não-dirigidos). [S. l.], 23 nov. 2020. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/ugraphs.html#exr:chess-knight. Acesso em: 9 jul. 2022.

MARINS, Fernando Augusto Silva. Introdução à Pesquisa Operacional. Cultura acadêmica, 2011.

Parâmetros curriculares nacionais: Ciências Naturais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

Introdução à Teoria dos Grafos, Profa Sheila Almeida e Mayara Omai (UTFPR/PG)