

SÉRIES DE FOURIER:**uma proposta de sequência didática para o Ensino Médio**

Rafaella Sousa Machado

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
rafaellasm18@gmail.com

Thamires Araujo Lima

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
limaaraujothamires@gmail.comLucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com**RESUMO**

O objetivo principal deste trabalho é o estudo sistemático e introdutório das Séries de Fourier, para obter como resultado a aquisição de conhecimentos básicos sobre essa teoria. No início são abordados aspectos históricos, assim como as motivações que levaram Jean Baptiste Fourier, a partir de seu interesse no estudo da condução térmica, a inovadora resolução da equação do calor e o direcionou a elaboração das Séries de Fourier. Essa teoria permite representar e estudar o comportamento de certas funções a respeito das propriedades de periodicidade e seus critérios de convergência. Para funções periódicas pares e ímpares explicitamos formas simplificadas de série de Fourier conhecida como série do cosseno de Fourier e série do seno de Fourier. Devido ao fato desse trabalho de conclusão de curso ser de uma licenciatura Matemática optou-se como aplicação desenvolver uma sequência de atividades para o Ensino Médio para relacionar a teoria estudada na forma de um algoritmo, implementado por meio do software livre Graphmatica, como ferramenta para motivação do estudo de trigonometria e destacar a imensa área de aplicação e relevância para a sociedade na atualidade, do estudo da teoria de Fourier.

Palavras-chave: Série de Fourier. Sequência didática. Senos. Cossenos. Funções periódicas.

ABSTRACT

The main objective of this work is the systematic and introductory study of Fourier Series, in order to obtain as a result the acquisition of basic knowledge about this theory. At the beginning, historical aspects are discussed, as well as the motivations that led Jean Baptiste Fourier, from his interest in the study of thermal conduction to the innovative resolution of the heat equation, directed the elaboration of the Fourier Series. This theory makes it possible to represent and study the behavior of certain functions with respect to periodicity properties and their convergence criteria. For even and odd periodic functions we explain simplified forms of Fourier series known as Fourier cosine series and Fourier sine series. Due to the fact that this course conclusion work is a Mathematics degree, it was chosen as an application to develop a sequence of activities for High School to relate the theory studied in the form of an algorithm, implemented through the free software Graphmatica, as a tool to motivate the study of trigonometry and highlight the immense area of application and relevance for society today, of the study of Fourier theory.

Keywords: Fourier series. Didactic sequence. Sines. Cosines. Periodic functions.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho versa sobre Séries de Fourier, com foco na proposta de uma Sequência Didática para alunos do Ensino Médio (E. M.) com assuntos relacionados à trigonometria, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), citados no capítulo 3.

O segundo capítulo apresenta alguns fatos históricos sobre a origem dos senos e cossenos e em seguida aborda-se a origem de estudos de Fourier, vinculando-o através de suas séries com senos e cossenos e mostra-se alguns de seus cálculos e postulados.

O terceiro capítulo apresenta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que são resgatados pontos importantes para o ensino da Matemática e informações do Ensino Médio em que se enfatiza os objetivos a serem alcançados.

No capítulo seguinte apresenta-se uma sequência de atividades ao relacionar a teoria na forma de um algoritmo, implementar por meio de softwares livres como ferramenta para as aplicações. Optou-se pelo software Graphmatica gratuito, como instrumento didático, devido a sua interface amigável, em que possibilita trabalhar as representações gráficas como as funções de primeiro e segundo graus, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas e outras.

Em determinadas etapas da sequência didática consta como utilizar o Graphmatica e algumas aplicações, ou seja, construção de gráficos contendo atividades que envolvam frequência, período e amplitude. Finaliza com a construção de ondas quadradas e dente de serras que nada mais é do que a realização de determinados somatórios de senos e/ou cossenos, para destacar a importância das Séries de Fourier para os licenciandos de Matemática na motivação do ensino da trigonometria para os alunos do EM, além da imensa área de aplicação e relevância para a sociedade na atualidade.

Neste capítulo são evidenciados fatos históricos sobre a trigonometria e em seguida, a história de Fourier e suas aplicações.

2.1. TRIGONOMETRIA

A trigonometria não é um conceito novo, muito pelo contrário, alguns conceitos relacionados a ela já eram desenvolvidos entre os povos antigos, como egípcios e babilônios. Os gregos também deram importantes aporte para a trigonometria, principalmente o astrônomo Hiparco de Nicéia, que durante a segunda metade do século II a.C. fez contribuições a partir de 12 livros que tratavam sobre a tábua de cordas, relacionando um círculo arbitrário para vários ângulos, sendo considerada a primeira tabela trigonométrica, fazendo com que Hiparco tivesse o direito de ser chamado de “pai” da trigonometria (BORGES, 2021).

Entretanto, Ptolomeu de Alexandria, teve sua obra *Syntaxis Mathematica* considerada a mais influente obra da antiguidade. Entre os 13 livros, o primeiro continha a tábua de corda de arcos e possuía como base os escritos de Hiparco.

Ainda na Grécia a divisão da circunferência em 360° já era usada, não se sabe ao certo a motivação, porém uma das suspeitas é a relação com o ciclo das estações do ano que era dividido em 360 dias.

Já os hindus utilizavam uma forma equivalente a função seno substituindo as tabelas de cordas gregas, e os valores de seno relacionados a essas tabelas eram bem próximas aos valores das tabelas atuais.

Entre os séculos XIV e XVII houveram importantes evoluções referentes à trigonometria, entre elas, grandes matemáticos que tiveram contribuições significativas para o estudo da mesma, sendo um deles, Fourier, que apresentou um trabalho no qual aparecem soluções de séries de funções trigonométricas, que será citado no subcapítulo 2.1 para detalhar suas contribuições (BORGES, 2021).

O francês Jean Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico importante, que por meio de seu estudo realizado pela propagação de calor em corpos sólidos na publicação de “*Mémoire sur la théorie de la chaleur*”, conseguiu analisar a decomposição das funções periódicas em um conjunto de séries trigonométricas convergentes, além de demonstrar que qualquer função, independentemente de sua complexidade, consegue ser decomposta por somas das funções de seno e cossenos, sendo denominadas “Séries de Fourier”, em sua homenagem (MOTA JÚNIOR; NASCIMENTO; GÓES, 2018).

Por ser uma série infinita de soma de senos e cossenos, a Série de Fourier foi proposta inicialmente para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs) com contorno periódico definido, e qualquer função que seja “suficientemente regular” pode ser representada na combinação desse somatório, porém a sua aplicabilidade na área científica se ampliou além da análise da propagação do calor para qual foi inicialmente proposta (DUTRA; TARRILLO; DEL PRADO, 2020).

Séries de Fourier podem ser utilizadas em diferentes campos científicos, tais como na física, na química, na engenharia e na matemática. A técnica de somas de senos e cossenos que solucionou várias equações diferenciais, permitiu aos profissionais de diversas áreas realizar inúmeras previsões complexas como, por exemplo, risco do investimento da bolsa de valores, o comportamento das partículas nos laboratórios, as variações de temperatura atmosféricas, as precipitações pluviais e processamentos de sinais (DUARTE *et al.*, 2019).

Normalmente, as Séries de Fourier são utilizadas quando os sinais irregulares são descritos de forma sobreposta aos regulares em diferentes amplitudes e frequências. Na óptica, a luz é descrita por meio das cores fundamentais do arco-íris, na música, o seno é descrito como uma mistura de sons puros, portanto, os sinais podem ser investigados no domínio da frequência, também conhecido como domínio de Fourier, utilizando a série de Fourier para as análises (OLIVEIRA, 2007).

2.3. CONCEITOS MATEMÁTICOS PARA ENTENDIMENTO DAS SÉRIES DE FOURIER E CÁLCULO DE SEUS COEFICIENTES

Para a compreensão das integrais trigonométricas que serão utilizadas no cálculo dos coeficientes das Series de Fourier, será necessário lembrar algumas definições de identidades trigonométricas; funções pares, ímpares e periódicas.

2.3.1. Identidades trigonométricas

Algumas identidades trigonométricas apresentadas a seguir, utilizam-se das fórmulas da transformação do produto de senos e cossenos em somas de senos e cossenos para se obter as fórmulas da soma e da diferença do cosseno e do seno de dois arcos a e b , tais que $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (1)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (2)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \quad (3)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \quad (4)$$

Ao somar os elementos das equações 1 e 2, tem-se:

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

Portanto, o produto do cosseno de dois arcos é metade da soma dos cossenos da soma e das diferenças desses arcos, como:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) \quad (5)$$

Para a transformação do produto dos senos de dois arcos, vem:

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$$

Portanto, o produto dos senos dos arcos a e b é \rightarrow

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \quad (6)$$

Analogamente, para obter o produto do seno pelo cosseno \rightarrow

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen}(a) \cos(b) \rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)) \quad (7)$$

2.3.2. Funções pares e ímpares e suas integrais

Uma função $f: R \rightarrow R$ é uma função par se $f(x) = f(-x)$ e é uma função ímpar se $f(x) = -f(-x)$.

Por exemplo, para todo $x \in R$ e $n \in \mathbb{N}$ as funções:

- $\cos(nx)$ e x^{2n} são pares;
- $\operatorname{sen}(nx)$ e x^{2n+1} são ímpares.

Dessa forma, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções pares e $r(x)$ e $s(x)$ são funções ímpares, têm-se as seguintes propriedades:

- O produto de duas funções pares é uma função par:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (f \cdot g)(-x) \quad (8)$$

- O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar:

$$(f \cdot r)(x) = f(x)r(x) = f(-x)(-r(-x)) = -f(-x)r(-x) = -(f \cdot r)(-x) \quad (9)$$

- O produto de duas funções ímpares é uma função par:

$$(r \cdot s)(x) = r(x)s(x) = (-r(-x))(-s(-x)) = r(-x)s(-x) = (r \cdot s)(-x) \quad (10)$$

2.3.3. Funções periódicas

Uma função $f: R \rightarrow R$ é periódica se, dado um período $T \in R$, $T > 0$, então:

$$f(x) = f(x+T) \text{ para } \forall x \in R$$

Têm-se ainda que

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \dots = f(x+nT) \quad \forall x \in R \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$ é periódica com período $T = 2\pi$.

Então, tomando-se a fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

obtém-se:

$$\text{sen}(x + T) = \text{sen}(x)\cos(T) + \text{sen}(T)\cos(x)$$

Substituindo $T = 2\pi$, vem

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)\cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi)\cos(x) = \text{sen}(x)$$

E no caso geral,

$$\text{sen}(x + nT) = \text{sen}(x)\cos(nT) + \text{sen}(nT)\cos(x) \quad n \in \mathbb{N}$$

Como $T = 2\pi$, $\cos(2n\pi) = \cos(2\pi) = 1$ e $\text{sen}(2n\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$, então:

$$\text{sen}(x + nT) = \text{sen}(x)$$

Analogamente,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\cos(x + nT) = \cos(x)\cos(nT) - \text{sen}(x)\text{sen}(nT)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \text{sen}(x)\text{sen}(2\pi) \rightarrow \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Essas propriedades podem auxiliar no cálculo de algumas integrais, pois a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico $[-L, L]$ em relação ao zero é zero e a integral de uma função par em um intervalo simétrico $[-L, L]$ é igual ao dobro da integral no intervalo $[0, L]$. (CHIARADIA, 2018, p. 6).

2.4. INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar integráveis em qualquer intervalo limitado, então:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 0$$

Demonstração: como f é uma função integrável em qualquer intervalo limitado e é par, então:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx$$

Fazendo a mudança de variável $x = -y$, então $dx = -dy$, logo:

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy$$

Sendo f par, então $f(-y) = f(y)$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(x) dx$$

Portanto:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

De forma similar:

$$\int_{-L}^L g(x) dx = \int_{-L}^0 g(x) dx + \int_0^L g(x) dx$$

Fazendo a mudança de variável $x = -y$, então $dx = -dy \rightarrow$

$$\int_{-L}^0 g(x) dx = - \int_L^0 g(-y) dy$$

Como g é uma função ímpar, então $g(-y) = -g(y)$ implica em:

$$\int_{-L}^0 g(x) dx = \int_L^0 g(y) dy$$

$$\int_a^b g(x) dx = - \int_a^b g(x) dx \int_{-L}^0 g(x) dx = - \int_0^L g(x) dx$$

Portanto:

$$\int_{-L}^L g(x) dx = - \int_0^L g(x) dx + \int_0^L g(x) dx = 0$$

2.4.1. Integração por partes

Um dos métodos de integração aplicado no cálculo dos coeficientes a_n e b_n é o método de integração por partes, pois temos funções do tipo $f(x)\sin(nx)$ e $f(x)\cos(nx)$.

Sejam as funções $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis com derivadas integráveis, então:

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b g f'$$

Demonstração: como f e g são deriváveis por hipótese, temos pela derivação do produto

$$(fg)' = f'g + fg'$$

E como f' e g' são integráveis por hipótese e pelo fato de que isso implica em $f'g$ e fg' serem integráveis e como a integral da soma é a soma das integrais, integrando ambos os membros da equação anterior, fica:

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

Como $\int_a^b (fg)' = fg \Big|_a^b$, isolando, $\int_a^b fg'$,

$$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

2.4.2 Resolução de integrais trigonométricas aplicando as fórmulas de transformação de produto em somas.

No cálculo dos coeficientes a_n e b_n da série de Fourier aparecem alguns tipos de integrais trigonométricas em que é necessário aplicar as fórmulas de transformação de produto em somas. Tem-se as seguintes integrais nas quais m e n representam números inteiros:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{cos}(mx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx$$

Ao transformar o produto em soma conforme na equação (5). Logo, se $m \neq n$ então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{cos}(m+n)x + \text{cos}(m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}((m+n)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}((m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(m+n)x}{(m+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = 0$$

No caso em que $m = n$, fica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{cos}(m+n)x + \text{cos}(m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{cos}(2nx) + \text{cos}(0)) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{cos}(2nx) + 1) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(2nx) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(2nx)}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx)\text{cos}(mx) dx = \pi$$

Obtém-se:

$$\pi, m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Para a integral $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx$, aplica-se a transformação de

acordo com a equação (6), se $m \neq n$, acha-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(m+n)x}{(m+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx) dx = 0$$

No caso que $m = n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-n) + \cos(n+n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(0) + \cos(2nx)) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx) dx = \pi$$

Tem-se, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi, & \text{se } m = n \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Por fim, a integral $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx$, pode ser resolvida pela equação (7).

No caso se $m \neq n$, encontra-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}((m+n)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}((m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\cos(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx = 0$$

No caso em que $m = n$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(2nx) + \text{sen}(0)) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2nx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(nx) dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(nx) dx = 0$$

Por fim, tem-se que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Em seguida são apresentados os cálculos dos coeficientes de Fourier.

2.4.3 Cálculo dos coeficientes

Considera-se que uma função f pode ser representada como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) \quad (11)$$

E que esta série seja convergente para $-\pi \leq x \leq \pi$. Para escrever a função em tal formato, deve-se calcular os coeficientes a_0 , a_n e b_n , denominados harmônicos da onda senoidal fundamental.

Para calcular o coeficiente a_0 , basta integrar a equação anterior no intervalo $(-\pi, \pi)$. Aplicando as propriedades do somatório e da integral definida, encontra-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) \right) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx$$

Como $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$ devido à periodicidade de $\sin(nx)$ e

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$ devido ao fato de $\sin(nx)$ ser uma função ímpar, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 x$$

Por consequência, chega-se a seguinte fórmula para calcular o coeficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Para o coeficiente a_n a estratégia é multiplicar ambos os membros da equação (11) por $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, e integrar no intervalo $(-\pi, \pi)$, obtendo assim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos(mx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

$$+ b_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$$

Como $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$, pois função

$\sin(nx) \cos(mx)$ é uma função ímpar e como $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi$ quando $n = m$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Para se calcular o coeficiente b_n , basta multiplicar ambos os membros da equação (11) por $\text{sen}(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, e integrar no intervalo $(-\pi, \pi)$. Tem-se, então:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \text{sen}(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \text{sen}(mx) dx \\ & \quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \end{aligned}$$

Sabendo que $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx = 0$, pois

$\cos(nx) \text{sen}(mx)$ é ímpar no intervalo simétrico $(-\pi, \pi)$ e como

$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx = \pi$ no caso de $n = m$, pode-se concluir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx = b_n \pi \rightarrow \text{o coeficiente } b_n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx$$

Com isso, já se está apto a calcular a série de Fourier de uma função.

É importante salientar que existem séries que contém apenas senos, outros, apenas cossenos e séries que contém senos e cossenos.

2.4.4 Séries que envolvem senos e cossenos

Uma série de Fourier pode ser composta de senos e/ou de cossenos.

Ela será apenas de senos se tivermos $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que ocorre se f for uma função ímpar. Por outro lado, a série de Fourier será apenas de cossenos se $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o que acontece quando f é par. Segue uma demonstração dessas propriedades:

Seja $f: [-L, L] \Rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar de período $2L$ integrável e absolutamente integrável, então tem-se:

$$a_n = 0 \quad e \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Demonstração:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

E f é ímpar, então, $g(x) = f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é o produto de uma função ímpar por uma função par, e por (9), g é uma função ímpar. Como a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico em relação ao zero é nula, então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx = 0$$

Como

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Com f ímpar, então $h(x) = f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par, pois $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par. Pelo fato de que

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 2 \int_0^L h(x) dx$$

Então

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Analogamente, demonstra-se o seguinte teorema:

Se f é uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = 0$$

Pode-se também de escrever a série em um outro formato em que estão implícitos os coeficientes a_n e b_n . Isso pode ser feito como descrito a seguir.

2.4.5 Forma compacta da Série de Fourier

Pode-se escrever a série de Fourier em uma forma compacta. Para tal, deve-se encontrar a_n e b_n de forma que:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \phi_n)$$

Aplica-se o seno da soma de dois arcos

$$A_n \sin(nx + \phi_n) = A_n \sin nx \cos \phi_n + A_n \sin \phi_n \cos nx$$

Portanto, deve-se ter:

$$\begin{cases} a_n = A_n \sin \phi_n \\ b_n = A_n \cos \phi_n \end{cases}$$

Tomando os quadrados e somando membro a membro, obtém-se a seguinte relação:

$$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 (\sin^2 \phi_n + \cos^2 \phi_n) = A_n^2$$

Isolando A_n e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, encontra-se:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Tem-se ainda:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n \sin \phi_n}{A_n \cos \phi_n} = \frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_n} = \tan \phi_n$$

Portanto:

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Então pode-se escrever a série de Fourier na seguinte forma:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx + \phi_n)$$

Onde tem-se:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

Sendo A_n e ϕ_n dados respectivamente pelas equações $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

De forma semelhante escreve-se a forma compacta em termos do cosseno:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx + \phi_n)$$

3. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A BNCC é um documento que assegura o direito de aprendizagem e desenvolvimento do aluno ligado ao nível de Educação Básica, sendo uma normativa que define processos de aprendizagens essenciais atrelados ao desenvolvimento do aluno ao longo de todo o seu desempenho na escola básica (BRASIL, 2018).

A BNCC é um instrumento que busca garantir um ensino nivelado entre os alunos de todo o país, de modo que tenham acesso ao mesmo nível de educação. O documento está estruturado em habilidades e competências relacionadas ao ano que o aluno está cursando e aos conteúdos escolares.

Na BNCC a competência pode ser definida como:

“competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

Observa-se então que esse documento norteia uma educação integral para o aluno, buscando o desenvolvimento intelectual, emocional e social dos nossos alunos, tornando-os seres críticos e atuantes na sociedade.

3.1. BNCC NO ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio é a etapa final do Ensino Básico e vem a reboque de grandes desafios, sendo um deles a evasão escolar. Levando em consideração que se torna crucial garantir a permanência desses alunos na escola, é importante que não os vejamos de forma homogênea, pelo contrário, buscando entender que os alunos têm suas singularidades e então procurar acolher suas diversidades, para que possamos assegurar que eles sejam protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem.

Com isso a BNCC entende que para atingir essas finalidades é necessário assumir que todo estudante é capaz de aprender e alcançar seus

objetivos, independente da realidade em que está inserido, e assume que a escola tem compromisso de:

favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política;
valorizar os papéis sociais desempenhados pelos jovens, para além de sua condição de estudante, e qualificar os processos de construção de sua(s) identidade(s) e de seu projeto de vida [...] (BRASIL, 2018. p. 465).

Portanto, atrelado a isso, as habilidades e competências propostas pela BNCC no Ensino Médio procuram que o aluno seja capaz de compreender e analisar situações ligadas à realidade, possibilitando então que ele seja capaz de atuar na sociedade em que vive de forma consciente, ética e transformadora.

3.2. ÁREA DA MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA ENSINO MÉDIO

No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (BRASIL, 2018).

É possível observar que a BNCC propõe o uso de tecnologias como ferramenta importante no ensino e no aprendizado dos alunos, e é levando isso em consideração que no presente trabalho elaboramos uma sequência didática voltada para uso de um Software como ferramenta significativa no ensino da trigonometria voltada a construção de gráficos de funções seno e cosseno relacionados a Séries de Fourier.

A BNCC mostra, dentre tantas, uma competência importante a ser trabalhada no Ensino Médio, sendo ela:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação em geral (BRASIL, 2018, p. 531).

Portanto, os alunos do Ensino Médio precisam de um ensino diversificado e busca-se atingir algumas competências propostas pela BNCC, entre elas a competência citada acima, e devido a isso, elaboramos várias atividades para serem trabalhadas no Ensino Médio, de modo a contribuir de forma significativa para o ensino aprendido dos alunos, mostrando que a Matemática pode ser aprendida de forma leve e interessante.

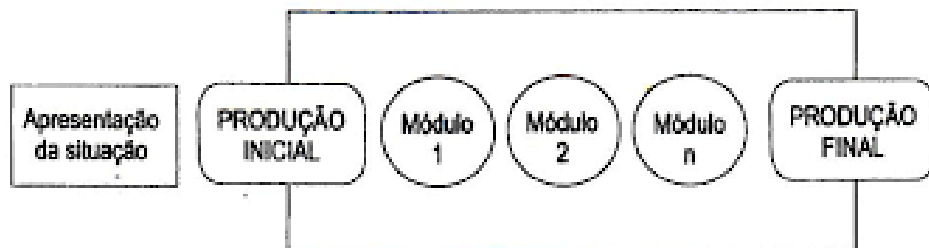
4. ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática (SD) é uma proposta de atividades para conduzir o processo de ensino e aprendizagem do estudante, que é constituída por uma série de conteúdos e atividades organizadas para serem aplicadas em sala de aula, tendo como objetivo auxiliar os alunos a resolverem exercícios específicos e promover a aprendizagem eficiente e condizente com o conteúdo que será abordado.

Segundo Zabala (2007, apud PERETTI; COSTA, 2013, p. 6), Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Entretanto para Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), há uma estrutura base na Sequência Didática, em que segundo eles primeiramente parte da apresentação da situação, logo após para a produção inicial, seguindo para os módulos e, por fim, a produção final, como mostrado na figura 1.

Figura 1 - Esquema da Sequência Didática



Fonte: DOLZ; NOVERRAZ; SCHNEUWLY. 2004, p. 98.

Uma Sequência Didática (S.D.) pode levar dias, semanas ou meses para ser concluída, pois depende do conjunto de atividades que o docente quer organizar para trabalhar com os alunos, e por meio da S.D. devemos levar em consideração inicialmente os conhecimentos prévios dos alunos e após aplicar a proposta mediante jogos, desafios, problemas, análises e reflexões.

Tema: Trigonometria e aplicações

Conteúdo: Função trigonométrica.

Objetivos:

- Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.
- Conceituar: fase, amplitude e frequência.
- Prever gráficos, apenas pelas funções.
- Construir gráficos e descrever suas semelhanças e diferenças.
- Resolver situações problemas envolvendo funções trigonométricas e construção de gráficos com o software Graphmatica.
- Atrair essas construções a séries de Fourier junto a onda quadrada; onda dentada e outras.

Habilidades e Competências: (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Série: 2ª série do Ensino Médio.

Tempo estimado: 1 mês

20 aulas (45 minutos cada).

Desenvolvimento:

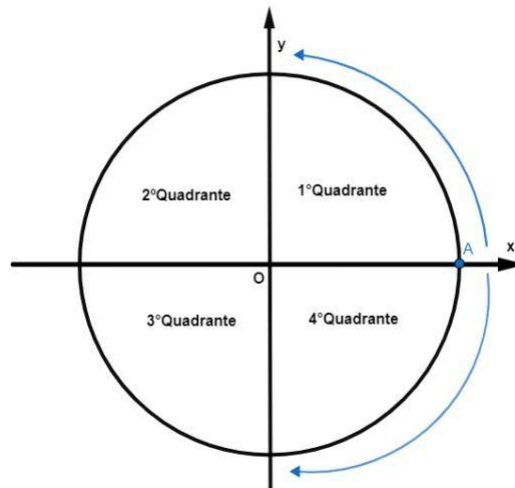
1ª etapa: Recordar e retomar conteúdo - Pré-requisitos (2 aulas)

Essa primeira etapa será voltada para identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito do conteúdo que será trabalhado durante toda a sequência didática, pois para realizar as construções gráficas é indispensável que os alunos tenham conhecimentos sobre a função trigonométrica. Após o levantamento, deve-se relembrar os conceitos de seno e cosseno, evidenciando suas funções e o que caracteriza na função a amplitude e frequência, ou seja, a função $f(x) = a \cdot \text{sen}(x)$, tem o coeficiente “a” como a “amplitude” e o argumento “x” como a “frequência” .

2ª etapa: Ciclo trigonométrico: Seno e Cosseno (6 aulas)

Os senos e os cossenos são definidos por um círculo com raio unitário e centro em sua origem denominado ciclo trigonométrico, representado no plano cartesiano e dividido em quatro quadrantes pelos eixos coordenados. O ciclo é situado positivamente no sentido anti-horário e negativamente no sentido horário, como mostrado na figura 2.

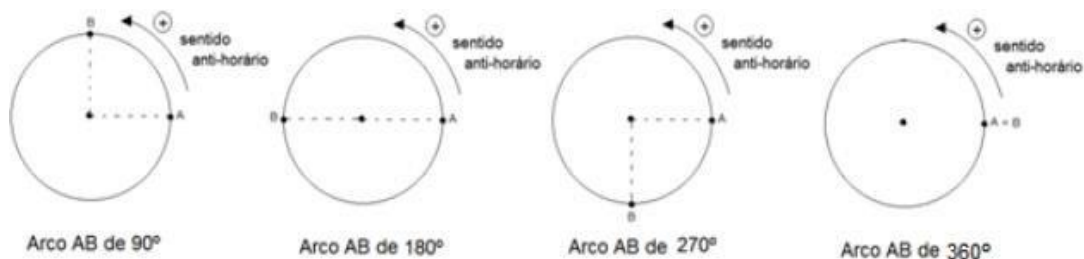
Figura 2 - Ciclo trigonométrico



Fonte: Autoria própria.

O ciclo trigonométrico pode ser subdividido em arcos, sendo eles constituídos por dois pontos distintos sobre a circunferência, e as unidades de um arco podem ser expressas na forma de grau e radiano. Em que o grau é representado pelo símbolo ($^{\circ}$) é um arco unitário igual $\frac{1}{360}$ de uma circunferência que contém o arco a ser medido.

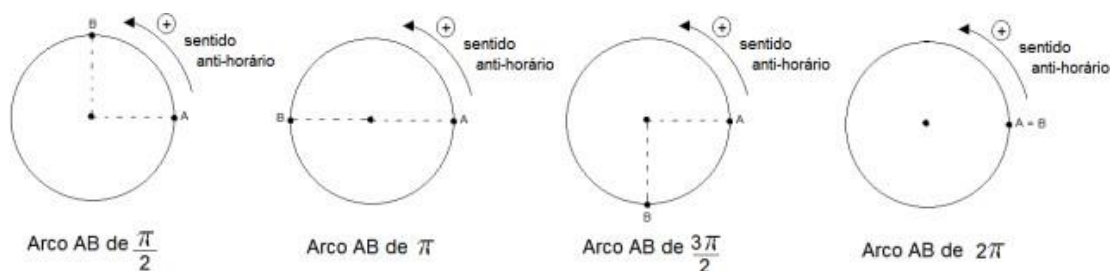
Figura 3 - Arcos no ciclo trigonométrico por meio dos graus(°)



Fonte: DANTAS, 2016, p. 22.

O radiano, símbolo (rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência, ou seja, AB equivale a 1 rad ,se quando esticado forme um segmento de reta AB cuja medida seria o raio da circunferência, de acordo com a figura 4.

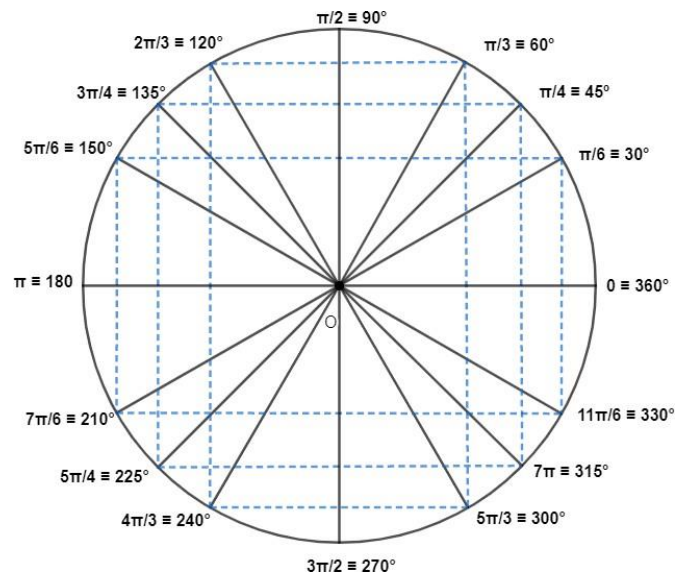
Figura 4 - Arcos no ciclo trigonométrico por meio de radianos(rad)



Fonte: DANTAS, 2016, p. 22.

A divisão do ciclo trigonométrico é feita em arcos correspondentes a 30° ou 45° denominadas arcos notáveis cuja medida pode ser em graus ($^\circ$) ou radianos (rad), conforme a figura 5.

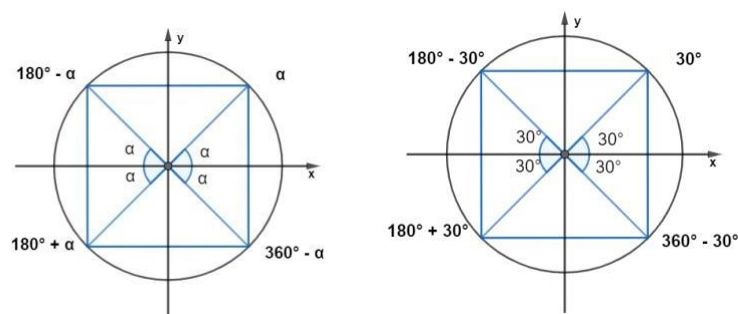
Figura 5 - Ciclo trigonométrico e os arcos notáveis



Fonte: Autoria própria.

Outro ponto a ser considerado no ciclo trigonométrico são os arcos correspondentes que são obtidos por meio da redução ao primeiro quadrante, como por exemplo, os ângulos do primeiro quadrante têm ângulos correspondentes no segundo, terceiro e quarto quadrante, sendo possível graças a simetria do ciclo trigonométrico, conforme a imagem abaixo.

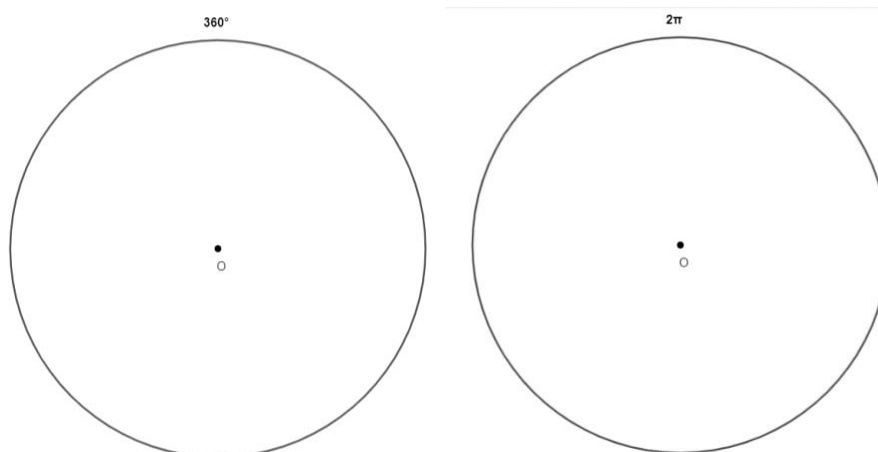
Figura 6 - Redução dos arcos correspondentes



Fonte: Autoria própria.

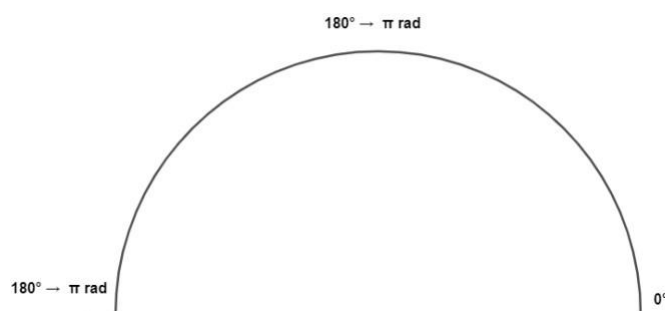
Portanto reforçamos que a medida do ciclo trigonométrico é de 360° sendo equivalente a $2\pi \text{ rad}$ e sua metade 180° sendo equivalente a $\pi \text{ rad}$. Como a figura 7 e em seguida figura 8:

Figura 7 - Ciclo inteiro (360°)



Fonte: Autoria própria.

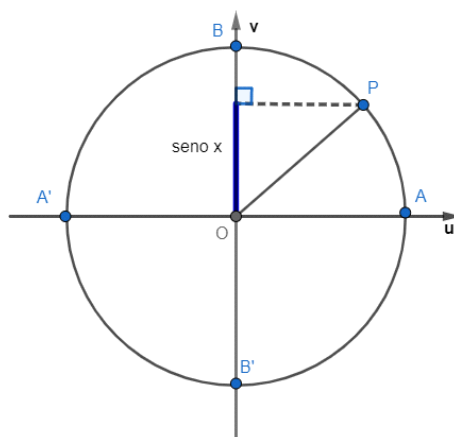
Figura 8 - Metade do Ciclo inteiro (180°)



Fonte: Autoria própria.

Sendo assim define-se a função seno, a função $f: R \rightarrow R$ que associa cada número real x a ordenada do correspondente ponto P , no ciclo trigonométrico e denotada por $f(x)=sen(x)$, como mostra na figura 9.

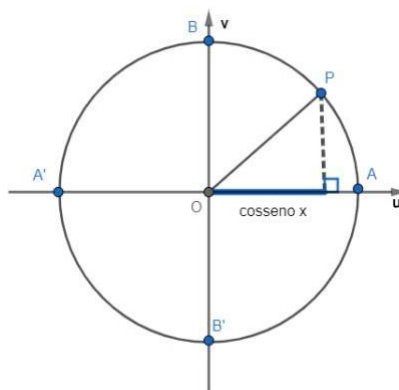
Figura 9 – Representação de seno



Fonte: Autoria própria.

Logo, de modo similar ao seno, define-se a função cosseno, função $f: R \rightarrow R$ que associa a cada real x a abscissa do correspondente ponto P no ciclo trigonométrico e denotada $f(x)=\cos(x)$, representado na figura 10.

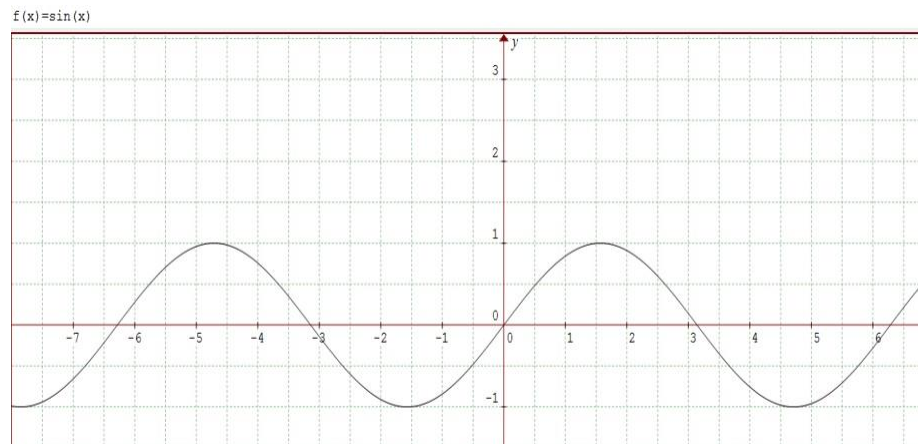
Figura 10 – Representação de cosseno



Fonte: Autoria própria.

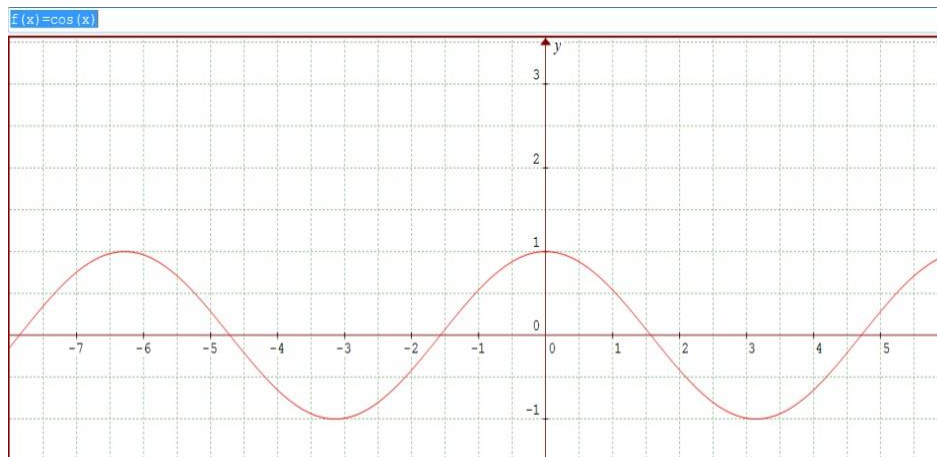
Por meio do ciclo trigonométrico, consegue-se esboçar os gráficos das funções $f(x)=\sin(x)$ e $f(x)=\cos(x)$, em que ambas têm imagem no intervalo de $[-1, 1]$ e são periódicas de período $T = 2\pi$. Nas figuras 11 e 12:

Figura 11 - Gráfico de $f(x)=\text{sen}(x)$



Fonte: Autoria própria.

Figura 12 –Gráfico de $f(x)=\text{cos}(x)$



Fonte: Autoria própria.

Mediante a essas funções tem-se os seguintes elementos associados a elas, que são: período, frequência e amplitude.

- Período (T): observa-se que nos gráficos das funções, ambos os casos se têm que $T = 2\pi$, isto é, o tamanho do intervalo que a função leva para realizar um ciclo completo.
- Frequência (ω): é o inverso do período $\rightarrow \omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$
- Amplitude: é definida como sendo a metade da diferença entre o maior valor e o menor valor que a senoide/cossenoide atinge no ciclo.

$$A = \frac{\text{valor max.} - \text{valor min.}}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

3ª etapa: Ensino do uso do software Graphmatica (2 aulas)

Graphmatica é um software gratuito que proporciona a possibilidade de trabalhar com duas dimensões, sendo capaz de representar graficamente qualquer função independentemente do seu grau, como por exemplo, funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas, entre outras. A interface é composta por uma barra de botões rápidos, com os comandos principais utilizados, uma área editável das funções e também um espaço onde aparecem os gráficos que foram inseridos na área editável das funções, e por fim o menu, como mostra a seguir.

Figura 13 - Software Graphmatica



Fonte: NÉRI, 2007, p. 2.

A seguir serão apresentadas algumas funções e suas representações escritas no software.

Figura 14 - Aplicação das funções escritas no Graphmatica

Função	Significado	Sintaxe	Equivalente
abs	módulo	$y = \text{abs}(x)$	$y = x $
sin	seno	$y = \text{sin}(x)$	$y = \text{sen}(x)$
cos	co-seno	$y = \text{cos}(x)$	$y = \text{cos}(x)$
asin	Arco seno	$y = a \text{sin}(x)$	$y = \text{arcsen}(x)$
acos	Arco co-seno	$y = a \text{cos}(x)$	$y = \text{arccos}(x)$
asec	Arco secante	$y = a \text{sec}(x)$	$y = \text{arc sec}(x)$
tan	tangente	$y = \text{tan}(x)$	$y = \text{tg}(x)$
atan	Arco tangente	$y = a \text{tan}(x)$	$y = \text{arctg}(x)$
cot	cotangente	$y = \text{cot}(x)$	$y = \text{cotg}(x)$
csc	cosecante	$y = \text{csc}(x)$	$y = \text{cos sec}(x)$
acot	Arco cotangente	$y = a \text{cot}(x)$	$y = \text{arccos}(x)$
acsc	Arco cosecante	$y = a \text{csc}(x)$	$y = \text{arccos sec}(x)$
sec	secante	$y = \text{sec}(x)$	$y = \text{sec}(x)$
exp	Potência de base e	$y = \text{exp}(x)$	$y = e^x$
ln	Log neperiano	$y = \text{ln}(x)$	$y = \text{ln}(x)$
log	Log na base 10	$y = \text{log}(x)$	$y = \text{log}(x)$
sqrt	Raiz quadrada	$y = \text{sqrt}(x)$	$y = \sqrt{x}$

Fonte: NÉRI, 2007, p. 32.

Os operadores utilizados e aceitos pelo Graphmatica são muito semelhantes a outros softwares, sendo os operadores suportados pelo programa os descritos abaixo.

Figura 15 - Operadores no Graphmatica

Operador	Significado	Exemplo
+	Adição	$y = 2x + 1$
-	Subtração	$y = 3x - 2$
*	Multiplicação	$y = 2 * x$ ou $y = a * \text{cos}(x)$
/	Divisão	$y = 2 / 2x$
^	Potenciação	$y = x ^ 2$
[] ou ()	Parêntesis	$y = [2x + 1] / 3x$
;	Separa as partes independentes de uma equação paramétrica	$x = 2t ; y = 2t^2 \{-10, 10\}$
'	Insere comentário	$y = x^2 \text{' segundo grau}$
{m , n }	Especifica o domínio	$\{2, 6\} = 2 \leq x \leq 6$

Fonte: NÉRI, 2007, p. 31.

Por fim, algumas variáveis aceitas pelo programa são:

Figura 16 - Variáveis no Graphmatica

Variáveis	Utilização	Exemplo
x, y	Coordenadas retangulares	$y = 2x - 4$
r, t	Coordenadas polares O t entra como θ	$r = \text{sen}(t)$ $r = \text{sen}(\theta)$
x, y, t	x e y como funções de t nas funções paramétricas	$x = 2t; y = t^3$

Fonte: NÉRI, 2007, p. 33.

4ª etapa: Criar gráficos (2 aulas)

Objetivo: Operacionalizar – aplicar os seguintes exercícios no Graphmatica para construções gráficas e observação da amplitude.

Exercício 1) Faça os gráficos das funções a seguir, no Graphmatica:

Função	Graphmatica
a) $f(x) = \text{sen}x$	$y = \text{sin}(x)$
b) $f(x) = 2\text{sen}(x)$	$y = 2 * \text{sin}(x)$
c) $f(x) = 3\text{sen}(x)$	$y = 3 * \text{sin}(x)$
d) $f(x) = (1/2) \text{sen}(x)$	$y = (1/2) * \text{sin}(x)$
e) $f(x) = (1/4) \text{sen}(x)$	$y = (1/4) * \text{sin}(x)$

- O que essas funções têm em comum quanto à **amplitude** da curva?

Exercício 2) Faça os gráficos das funções a seguir, no Graphmatica:

Função	Graphmatica
a) $f(x) = \text{cos}x$	$y = \text{cos}(x)$
b) $f(x) = 2\text{cos}(x)$	$y = 2 * \text{cos}(x)$
c) $f(x) = 3\text{cos}(x)$	$y = 3 * \text{cos}(x)$
d) $f(x) = (1/2) \text{cos}(x)$	$y = (1/2) * \text{cos}(x)$
e) $f(x) = (1/4) \text{cos}(x)$	$y = (1/4) * \text{cos}(x)$

- O que essas funções têm em comum quanto à **amplitude** da curva?

5ª etapa: Continuação das construções dos gráficos observando o argumento (2 aulas).

Exercício 3) Construa os gráficos das funções a seguir, no Graphmatica:

Função	Graphmatica
a) $f(x) = \text{sen}x$	$y = \text{sin}(x)$
b) $f(x) = \text{sen}(2x)$	$y = \text{sin}(2*x)$
c) $f(x) = \text{sen}(3x)$	$y = \text{sin}(3*x)$
d) $f(x) = \text{sen}((1/2)x)$	$y = \text{sin}((1/2)*x)$
e) $f(x) = \text{sen}((1/4)x)$	$y = \text{sin}((1/4)*x)$

- O que acontece com as funções à medida que aumentamos ou diminuimos o **argumento da função**?

Exercício 4) Construa os gráficos das funções a seguir, no Graphmatica:

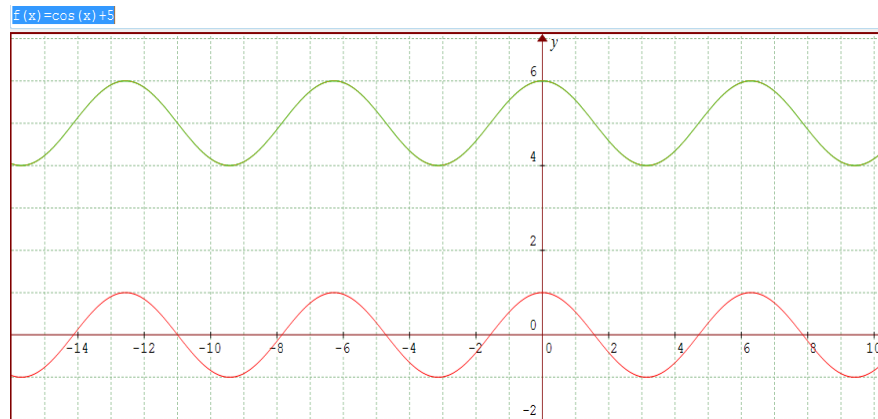
Função	Graphmatica
a) $f(x) = \text{cos}x$	$y = \text{cos}(x)$
b) $f(x) = \text{cos}(2x)$	$y = \text{cos}(2*x)$
c) $f(x) = \text{cos}(3x)$	$y = \text{cos}(3*x)$
d) $f(x) = \text{cos}((1/2)x)$	$y = \text{cos}((1/2)*x)$
e) $f(x) = \text{cos}((1/4)x)$	$y = \text{cos}((1/4)*x)$

- O que acontece com as funções à medida que aumentamos ou diminuimos o **argumento da função**?

6ª etapa: Continuação das construções dos gráficos observando o deslocamento. (2 aulas)

Observa-se a seguir exemplo de deslocamento de um gráfico (figura 17), para que na próxima atividade seja construído os gráficos propostos.

Figura 17 – $f_1(x) = \cos(x)$ (vermelho) e $f_2(x) = 5 + \cos(x)$ (verde)



Fonte: Autoria própria.

Exercício 5) Construa os gráficos das funções a seguir:

Função	Graphmatica
a) $f(x) = \text{sen}x$	$y = \sin(x)$
b) $f(x) = \text{sen}x + 3$	$y = \sin(x) + 3$
c) $f(x) = \text{sen}(x) - 1$	$y = \sin(x) - 1$
d) $f(x) = \text{cos}x$	$y = \cos(x)$
e) $f(x) = \text{cos}x + 1$	$y = \cos(x) + 1$
f) $f(x) = \text{cos}(x) - 2$	$y = \cos(x) - 2$

- O que as funções senoidais e cossenoidais têm em comum? E o que diferem?

Observem exemplos que contém comparações de frequência, amplitude e deslocamento (figuras 18, 19, 20, 21, 22 e 23):

Figura 18 – Gráfico $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$

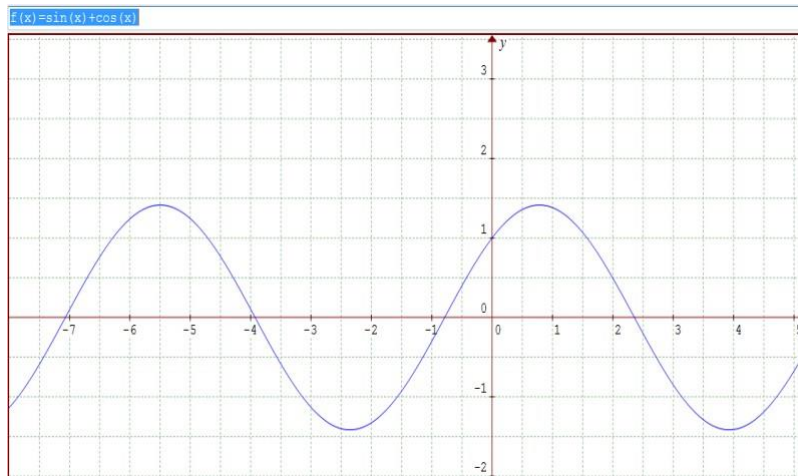
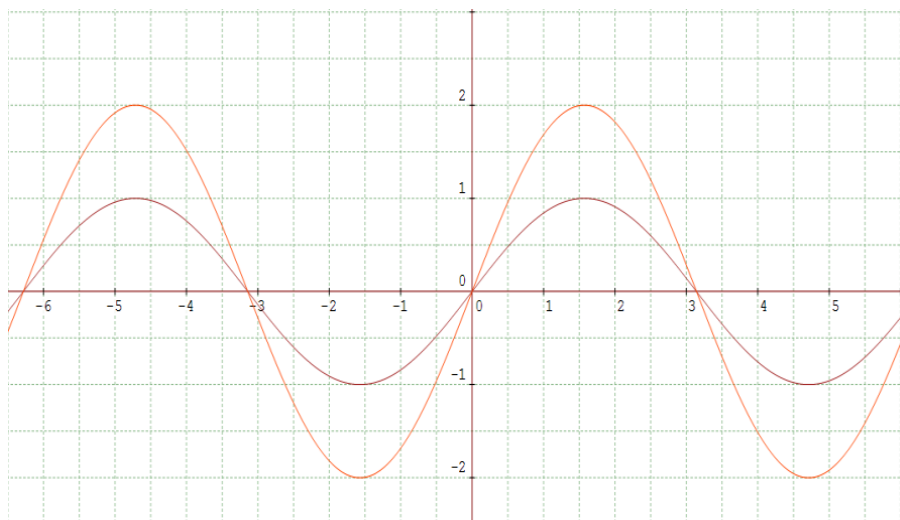
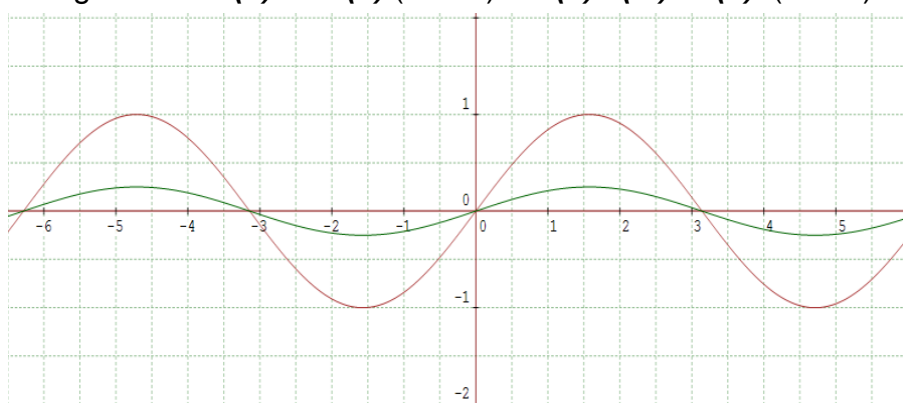


Figura 19 - $f_1(x) = \text{sen}(x)$ (bordô) e $f_2(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$ (vermelho)



Fonte: Autoria própria.

Figura 20 - $f_1(x) = \text{sin}(x)$ (bordô) e $f_2(x) = (1/4)\text{sin}(x)$ (verde)



Fonte: Autoria própria.

Figura 21 - $f_1(x) = \text{sen}(x)$ (bordô) e $f_2(x) = \text{sen}(5x)$ (azul)

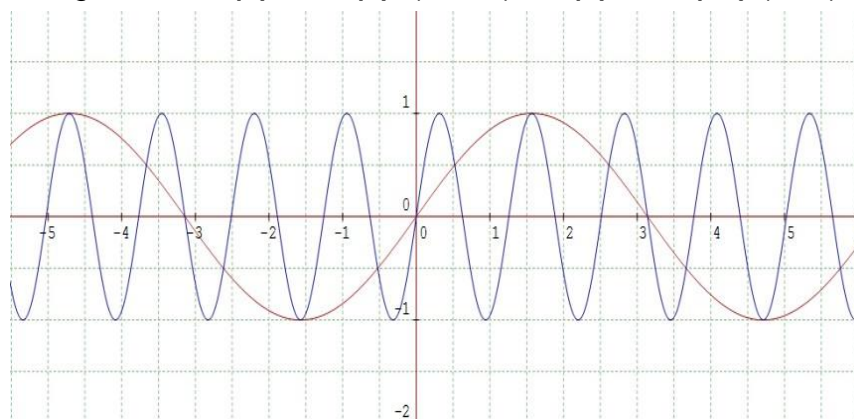
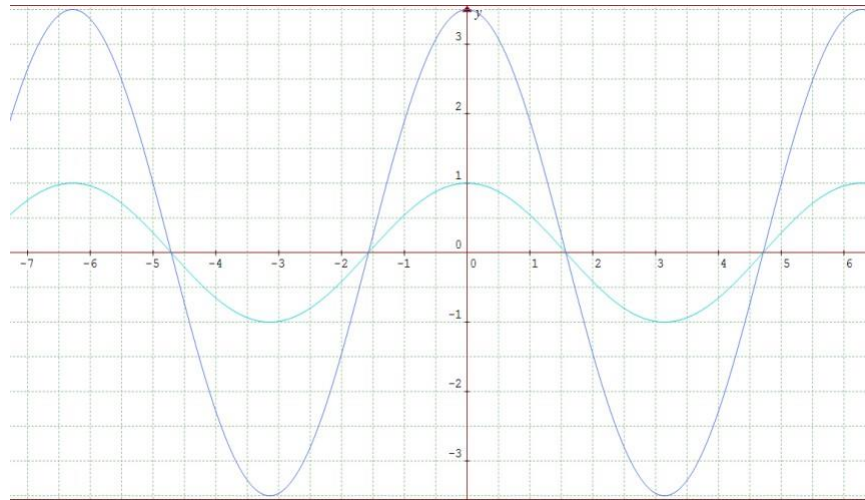
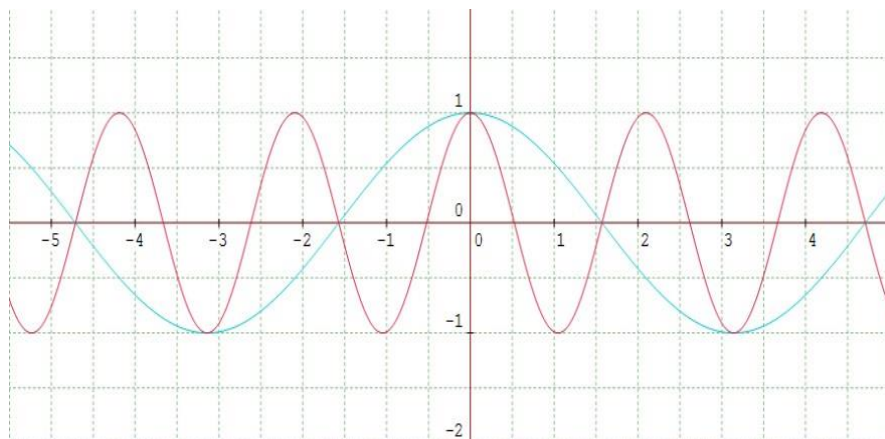


Figura 22 - $f_1(x) = \cos(x)$ (azul claro) e $f_2(x) = 3,5\cos(x)$ (azul)



Fonte: Autoria própria.

Figura 23 - $f_1(x) = \cos(x)$ (azul claro) e $f_2(x) = \cos(3x)$ (rosa)



Fonte: Autoria própria.

7ª etapa: Continuação das construções dos gráficos observando a amplitude, argumento e frequência. (4 aulas)

Exercício 6) Observe a amplitude e argumento na construção dos gráficos a seguir na função $\cos(x)$:

Função

a) $f(x) = 2 + \cos x$

b) $f(x) = 3 + \cos(2x)$

Graphmatica

$y = 2 + \cos(x)$

$y = 3 + \cos(2 \cdot x)$

c) $f(x) = 2 - \cos(3x)$

d) $f(x) = -3 + \cos((1/2)x)$

e) $f(x) = -1 + \cos((1/4)x)$

f) $f(x) = 2\cos(2x)$

g) $f(x) = 2\cos(3x)$

h) $f(x) = 3\cos((1/2)x)$

i) $f(x) = 3\cos(2x)$

j) $f(x) = 2\cos((1/4)x)$

$y = 2 - \cos(3x)$

$y = -3 + \cos((1/2)x)$

$y = \cos((1/4)x)$

$y = 2\cos(2x)$

$y = 2\cos(3x)$

$y = 3\cos((1/2)x)$

$y = 3\cos(2x)$

$y = 2\cos((1/4)x)$

Exercício 7) Observe a amplitude e argumento na construção dos gráficos a seguir na função $\text{sen}(x)$:

Função

a) $f(x) = 2 + \text{sen}x$

b) $f(x) = 3 + \text{sen}(2x)$

c) $f(x) = 2 - \text{sen}(3x)$

d) $f(x) = -3 + \text{sen}((1/2)x)$

e) $f(x) = -1 + \text{sen}((1/4)x)$

f) $f(x) = 2\text{sen}(2x)$

g) $f(x) = 2\text{sen}(3x)$

h) $f(x) = 3\text{sen}((1/2)x)$

i) $f(x) = 3\text{sen}(2x)$

j) $f(x) = 2\text{sen}((1/4)x)$

Graphmatica

$y = 2 + \text{sen}(x)$

$y = 3 + \text{sen}(2x)$

$y = 2 - \text{sen}(3x)$

$y = -3 + \text{sen}((1/2)x)$

$y = \text{sen}((1/4)x)$

$y = 2\text{sen}(2x)$

$y = 2\text{sen}(3x)$

$y = 3\text{sen}((1/2)x)$

$y = 3\text{sen}(2x)$

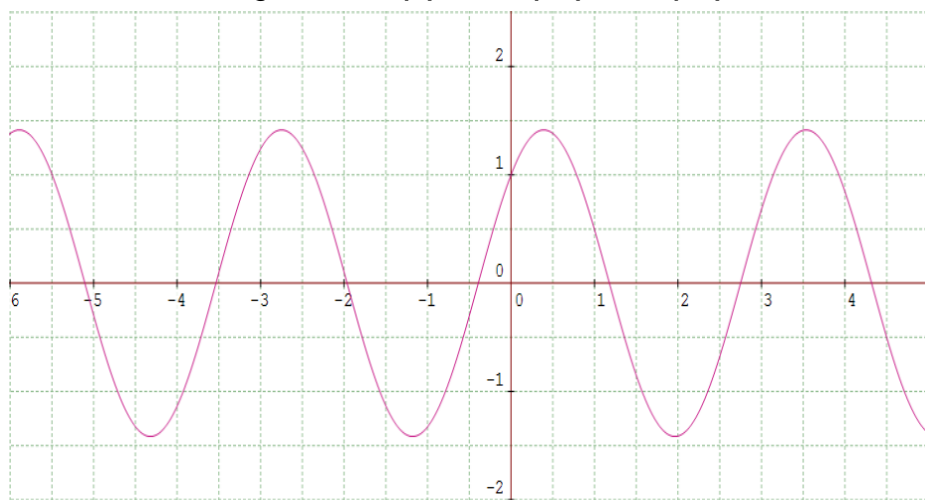
$y = 2\text{sen}((1/4)x)$

- Após as construções feitas, o que se conclui sobre os termos argumento, amplitude e deslocamento?

8ª Etapa- Construção de uma sequência de funções que conduza às ondas quadrada e dente de serra (aplicação das Séries de Fourier). (2 aulas)

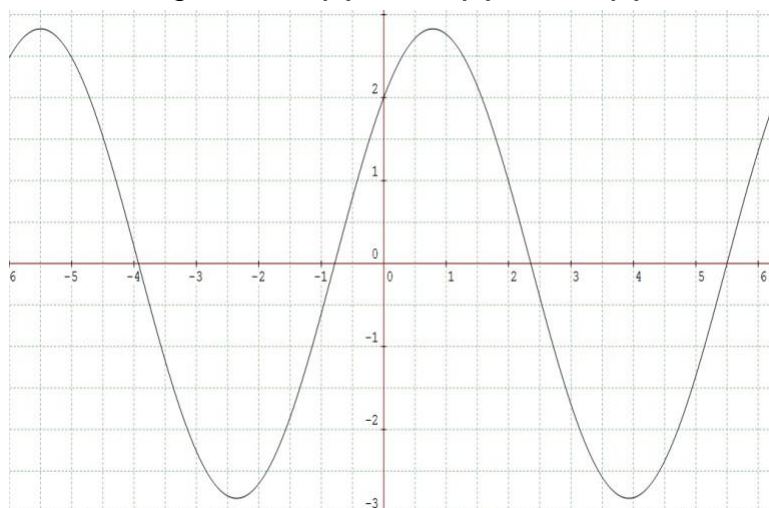
Segue os exemplos em que contém somas de senos e/ou cossenos. Nas figuras 24, 25 e 26.

Figura 24 - $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$



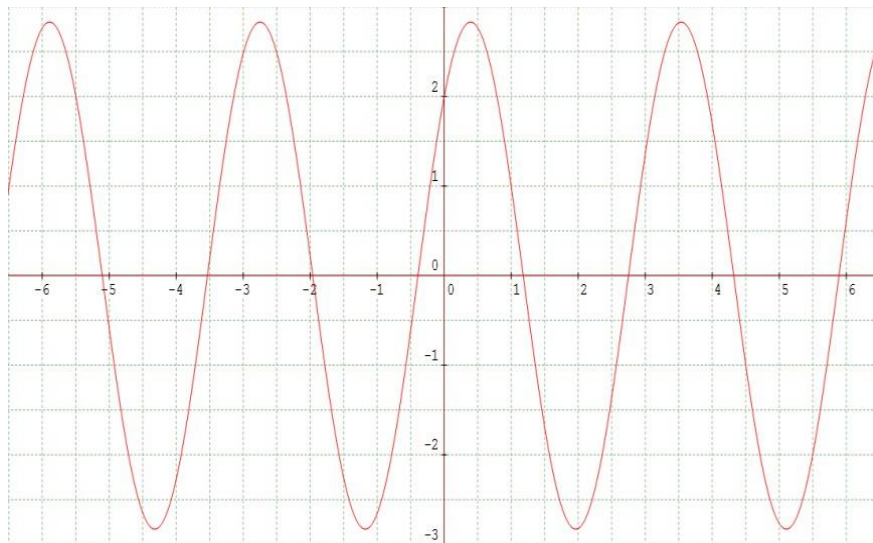
Fonte: Autoria própria.

Figura 25 - $f(x) = 2\cos(x) + 2\sin(x)$



Fonte: Autoria própria.

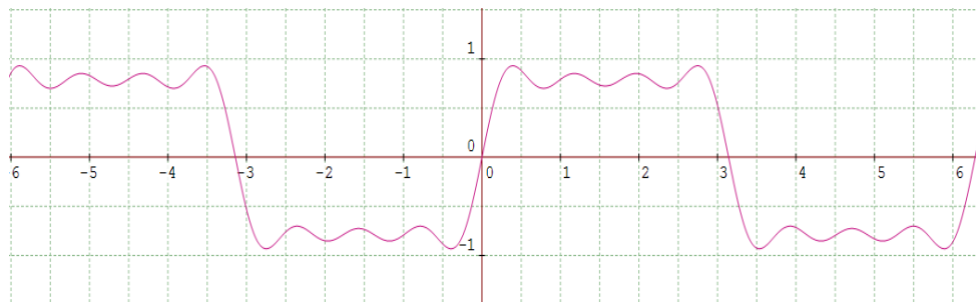
Figura 26 -Gráfico de $f(x)= 2\cos(2x) + 2\sen(2x)$



Fonte: Autoria própria.

Agora que sabe como é feito a soma de seno e/ou cosseno no software, observe a seguir exemplos de somas com mais composições para construção da onda quadrada. A figura 27 contém a representação gráfica da seguinte soma, $f_1(x)= \sen(x)+ 1/3\sen(3x)+1/5\sen(5x)+1/7\sen(7x)$.

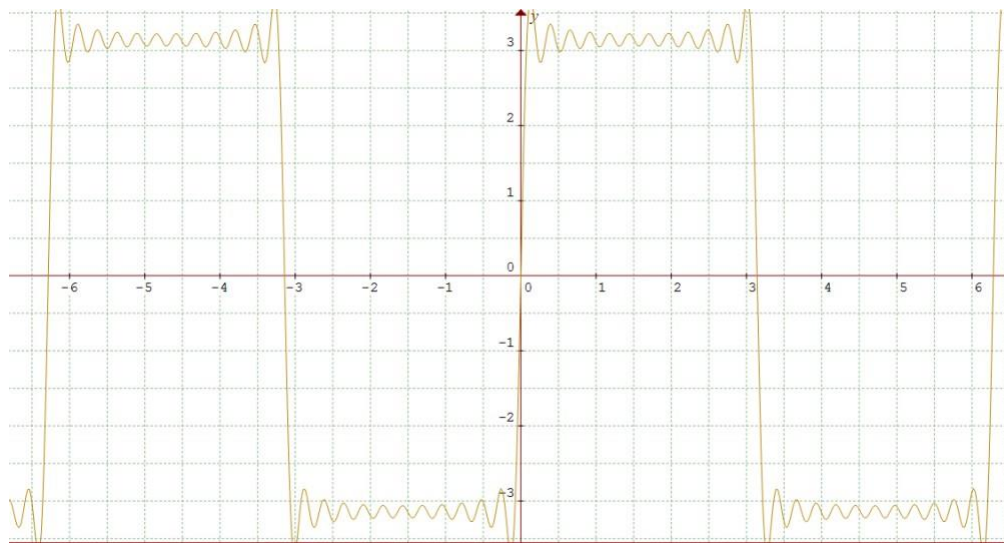
Figura 27 – Representação do gráfico de $f_1(x)$



Fonte: Autoria própria.

Na figura 28 contém a representação gráfica da seguinte soma, $f_2(x)= 4\sen(x)+4/3\sen(3x)+4/5\sen(5x)+4/7\sen(7x)+4/9\sen(9x)+4/11\sen(11x)+4/13\sen(13x)+4/15\sen(15x)+4/17\sen(17x)+4/19\sen(19x)+4/21\sen(21x)+4/23\sen(23x)$.

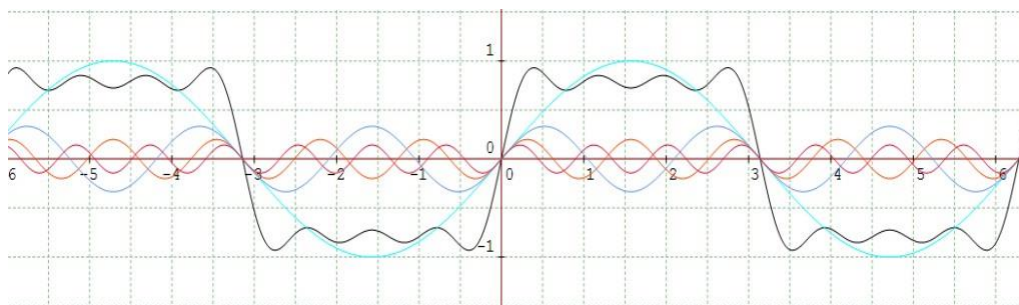
Figura 28 – Representação do gráfico da $f_2(x)$



Fonte: Autoria própria.

Logo na figura 29 teremos as seguintes funções para as representações gráficas: **Gráfico de $f_3(x) = \sin(x)$ (azul claro); $f_4(x) = 1/3\sin(3x)$ (azul escuro); $f_5(x) = 1/5\sin(5x)$ (vermelho); $f_6(x) = 1/7\sin(7x)$ (bordô)** e a onda quadrada que é a soma de todos eles ($f_3(x) + f_4(x) + f_5(x) + f_6(x)$).

Figura 29 – Representação do gráfico $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$, $f_6(x)$ e a onda quadrada



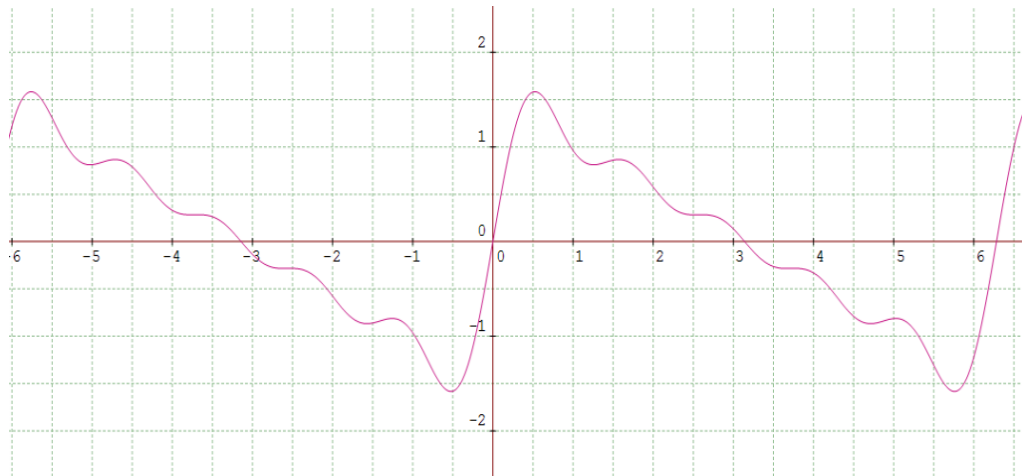
Fonte: Autoria própria.

Observe a seguir as ondas dente de serra ou dentada, na composição das figuras 30 e 31, respectivamente:

$$f_1(x) = \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} \quad \text{e}$$

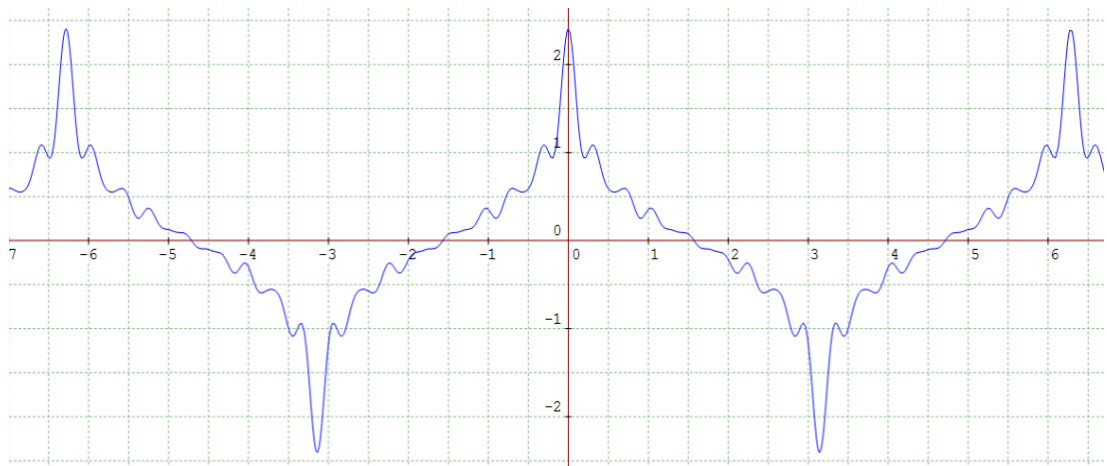
$$f_2(x) = \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} + \frac{\cos(7x)}{7} + \frac{\cos(9x)}{9} + \frac{\cos(11x)}{11} + \frac{\cos(13x)}{13} + \frac{\cos(15x)}{15} + \frac{\cos(17x)}{17} + \frac{\cos(19x)}{19} + \frac{\cos(21x)}{21} + \frac{\cos(23x)}{23} + \frac{\cos(25x)}{25}.$$

Figura 30 - Representação do gráfico dente de serra - $f_1(x)$



Fonte: Autoria própria.

Figura 31 – Representação do gráfico dente de serra - $f_2(x)$



Fonte: Autoria própria.

Exercício 8) Construa ondas quadrada e dentada a seguir:

a) Função: $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) + \frac{1}{7}\cos(7x)$

Graphmatica: $f(x) = \cos^*(x) + \frac{1}{3} \cos^*(3x) + \frac{1}{5} \cos^*(5x) + \frac{1}{7} \cos^*(7x)$

b) Função: $f(x) = \sin(x) + \sin(3x)/3 + \sin(5x)/5 + \sin(7x)/7 + \sin(9x)/9$

Graphmatica: $f(x) = \sin^*(x) + \sin^*(3x)/3 + \sin^*(5x)/5 + \sin^*(7x)/7 + \sin^*(9x)/9$

c) Função: $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 + \sin(4x)/4 + \sin(5x)/5$

Graphmatica: $f(x) = \sin^*(x) + \sin^*(2x)/2 + \sin^*(3x)/3 + \sin^*(4x)/4 + \sin^*(5x)/5$

d) Função: $f(x) = \cos(x) + \cos(2x)/2 + \cos(3x)/3 + \cos(4x)/4 + \cos(5x)/5$

Graphmatica: $f(x) = \cos^*(x) + \cos^*(2x)/2 + \cos^*(3x)/3 + \cos^*(4x)/4 + \cos^*(5x)/5$

e) Função: $f(x) = \cos(x) + \cos(2x)/2 + \cos(3x)/3 + \cos(4x)/4 + \cos(5x)/5$

Graphmatica: $f(x) = \cos^*(x) + \cos^*(2x)/2 + \cos^*(3x)/3 + \cos^*(4x)/4 + \cos^*(5x)/5$

9ª etapa: Finalizando a Sequência Didática (1 aula)

- Capa (escola, nome, série, título do trabalho, cidade, ano);
- Trabalho de 1 a 3 páginas;
- Explique sobre as funções trigonométricas;
- Explique sobre amplitude, frequência/argumento, período e deslocamento.
- Com construir ondas quadradas e ondas dente de serra usando as Séries de Fourier.
- Argumente sobre sua experiência com o software Graphmatica.
- O que está sequência de atividades acrescentou na sua aprendizagem?

5. DISCUSSÃO

Com o intuito de auxiliar o entendimento a respeito do desenvolvimento das etapas que compõem a sequência didática, nesse capítulo serão abordadas as ideias principais relacionadas ao tópico anterior a fim de se atingir os objetivos propostos em cada aula.

1ª etapa: Recordar e retomar conteúdo - Pré-requisitos

Nesta etapa faz-se necessário questionar os alunos a respeito do que sabem sobre senos, cossenos, se já ouviram falar em trigonometria e entender se têm familiaridade com o tema ou se é algo novo para eles.

2ª etapa: Ciclo trigonométrico: Seno e Cosseno

Considera-se que os alunos ainda não tenham tido contado com o tema, essa etapa é destinada para a apresentação do ciclo trigonométrico e conseqüentemente do que é seno e cosseno e suas funções. Propõe-se o esboço dos gráficos de algumas funções seno e cosseno variando o **coeficiente** e o **argumento** para enfatizar respectivamente, a **amplitude** e **frequência**. É importante que nessas aulas o professor consiga esclarecer todas as dúvidas possíveis dos alunos, pois esta etapa é importantíssima para que estes consigam desempenhar as próximas.

3ª etapa: Software Graphmatica.

Apresentação do software Graphmatica, plataforma que os alunos irão utilizar até o final da sequência didática, então torna-se essencial explicar e mostrar passo a passo como utilizar as funções, variáveis e operadores (símbolos da adição subtração, entre outros) no software.

4ª etapa: Operacionalizar – aplicar exercícios no Graphmatica para construções gráficas e observação da amplitude

Utilização e visualização das amplitudes dos gráficos das funções seno e cosseno no Graphmatica. É importante que o professor antes de tudo faça no Graphmatica um exemplo do que está sendo pedido e que mostre as variações quando modifica-se a amplitude da função $\text{sen}(x)$, sabendo-se que a **$f(x)=\text{sen}(x)$** tem

sua amplitude entre $[-1, 1]$, logo $f(x)=2\text{sen}(x)$ terá variação de $[-2, 2]$. Em seguida, acompanhe de perto os alunos enquanto fazem suas próprias construções, para poder instigá-los a observarem as variações em cada imagem em relação a amplitude.

5ª etapa: Continuação das construções dos gráficos com ênfase no argumento

Assim como na etapa anterior, é relevante que o professor faça exemplos para mostrar o que ocorre ao se modificar o **argumento**, quando este **aumenta o comprimento das ondas ficam mais curtas e a frequência aumenta**. Posteriormente acompanhe de perto cada construção, a fim de enfatizar que os alunos precisam observar os gráficos, vendo o que ocorre quando se aumenta ou diminui o argumento.

6ª etapa: Continuação das construções dos gráficos observando o deslocamento

Depois dos alunos observarem a amplitude e argumentos das funções seno e cosseno, neste momento eles vão atentar-se sobre o deslocamento das funções em relação aos eixos, sendo o professor responsável por mostrar exemplos do porquê elas se comportam assim, expondo para os alunos aspectos importantes relacionados a novas funções propostas;

7ª etapa: Continuação das construções dos gráficos observando amplitude, argumento e frequência.

Essa etapa tem como objetivo que os alunos analisem como as funções se comportam quando modificamos ao mesmo tempo aspectos como amplitude, argumento e frequência. O professor dará exemplos a respeito do que acontece com essas funções, além de acompanhar de perto as construções dos alunos, instigando-os sempre a pensar sobre o que está ocorrendo com cada um dos seus gráficos.

8ª Etapa- Construção das ondas quadrada e dentada (aplicação das Séries de Fourier).

Nesta etapa é interessante que se apresente resumidamente quem foi Jean Baptiste Fourier, pode-se utilizar o capítulo 2.2 como referência e de uma forma

simplificada mostrar aos alunos as ondas quadrada e dente de serra, explica-se que são somatórios de senos e/ou cossenos, como as figuras (24, 25, 26), e que a figura 27 é uma onda quadrada básica, evidenciando apenas o somatório da função seno, assim podendo conter mais informações ao compor somas de funções, ou seja, acrescentando mais somas de funções para modificar o somatório da função seno e/ou cosseno e com isso modificará sua amplitude, frequência e período.

Por fim, é essencial que o professor ao pedir que os estudantes componham essa onda, solicite que façam em um primeiro momento separadamente cada função e posteriormente a soma delas, para que observem detalhadamente essa construção, como mostrado na figura 29.

9ª etapa: Finalizando Sequência Didática.

Para finalizar, o professor pedirá que os alunos façam um relatório sobre o processo vivenciado até aqui, evidenciando a importância de todas essas atividades para o seu aprendizado. A estrutura do trabalho está descrita na nona etapa. O professor pode modificar ou acrescentar, se necessário, algum item.

Ao encerrar a leitura da última etapa da sequência didática é importante que o professor/leitor entenda que a proposta de fazer um paralelo entre as Séries de Fourier e o estudo da trigonometria está estritamente ligado ao fato de instigar os alunos a curiosidade de conhecer conceitos e se interessar por um assunto que perpassa a sala de aula. Além de que, o professor quando entende o estudo das Séries de Fourier, consegue envolver os conceitos e conseqüentemente oferecer mediante suas aulas, novas possibilidades e visões para que os alunos compreendam a importância da trigonometria no mundo moderno.

Através das Séries de Fourier juntamente com o cálculo diferencial integral, foi apresentada decomposições de ondas periódicas com visualizações passo a passo no programa *Graphmatica*.

Tais séries podem ser transformadas em instrumento que permite representar um sinal periódico como uma soma infinita de componentes senoidais (senos e cossenos) as quais são utilizadas para transformar para o domínio da frequência um sinal apresentado originalmente no domínio do tempo, principalmente quando certas características do sinal não forem observáveis no domínio original, essa mudança de domínio pode trazer grande vantagem para sua análise.

Procuramos evidenciar a importância das Séries de Fourier como ferramenta na análise de funções e independentemente da natureza da onda, se a mesma for periódica e preencher os requisitos citados, pode ser decomposta em uma somatória de senos e cossenos, podendo assim facilitar o estudo dessa onda.

E uma vez que esse é um trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática, procuramos relacionar a teoria estudada das Séries de Fourier na aplicação de uma sequência de atividades para o Ensino Médio, implementado por meio do software *Graphmatica*, como ferramenta para motivação do estudo de trigonometria e destacar a imensa área de aplicação e relevância para a sociedade na atualidade, do estudo da teoria de Fourier.

REFERÊNCIAS

BORGES, J. A. C. **Um estudo do seno: da história até o som.** Universidade de São Paulo - São Carlos, 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit_e.pdf. Acesso em: 26/06/2022.

CHIARADIA, J. E. **Sintetizando funções: uma aplicação das séries de Fourier.** Universidade Federal de Viçosa - Florestal, MG, 2018.

DANTAS, S. F. S. **Apresentação do ciclo trigonométrico via o jogo batalha naval circular.** Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande, 2015.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento. In.: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. **Gêneros orais e escritos na escola.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2004.

DUARTE, J. V. N.; FIDELIS FILHO, J.; FURTADO, D. A.; DA SILVA, V. C.; FRANCISCO, P. R. M. Utilização da Série de Fourier para caracterização pluviométrica dos municípios de Lagoa Seca – PB e Alagoa Nova – PB. **Energia na Agricultura**, v. 34, n. 1, p. 58-67, 2019.

DUTRA, D. T. F.; TARRILLO, C. A. M.; DEL PRADO, Z. J. G. Fourier Series solution for deflection analysis on simply supported beams subjected to distributed loads. **International Journal of Geoscience, Engineering and Technology**, v. 2, n. 1, p. 113-122, 2020.

NÉRI, I. C. **Guia do usuário Graphmatica.** São Paulo, 2007.

MOTA JÚNIOR, J. S. B.; NASCIMENTO, E. O.; GÓES, J. F. Modelagem de circuito RC através da série de Fourier. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v. 3, n. 2, p. 1-10, 2018.

OLIVEIRA, H. M. **Simulação e modelagem computacionais no auxílio à aprendizagem significativa e conceitos básicos de eletricidade.** 1. ed. Rio de Janeiro: Bransport, 2007.

PERETTI, L. COSTA, G. M. T. Sequência didática na Matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, 2013.

RAUEN, F. J.; CARDOSO, M. C. FILHO, B. M. A. **Linguagem e Ensino de Ciências e Matemática: Perspectivas de interfaces.** Formiga: Editora Real Conhecer, 2021.