

**Sobre a não integrabilidade da curva convexa infinitamente diferenciável em Isaac Newton.****On the nonintegrability of infinitely differentiable convex curve in Isaac Newton.**

Antonio Tadeu F. Amado<sup>1</sup>  
Curso de Matemática-Curso de Engenharia Civil  
Universidade Católica de Santos.  
Santos SP- Brasil

**Resumo.**

Nos *Principia Mathematica* [Newton, 2002; Newton, 1999], o *Lema 28* de Newton sobre a não integrabilidade algébrica de *ovais* teve uma recepção incomum. Ele argumenta que as áreas de *figuras ovais* não são exprimíveis em equações algébricas finitas. No entanto, Arnold [Arnold, 1989] apontou que se *oval* significa *curva convexa infinitamente diferenciável*, então a afirmação de Newton está correta e seu argumento tem os passos essenciais de uma prova rigorosa. Analisando a lei de Kepler em duas dimensões, vemos que Newton descobriu uma prova topológica surpreendentemente moderna da transcendência das integrais abelianas. Em nosso artigo descrevemos os dois teoremas de Newton e também alguns outros teoremas contidos no *Principia Mathematica* e parcialmente sugeridos por Newton.

**Abstract.**

In the *Principia Mathematica* [Newton, 2002; Newton, 1999], Newton's *Lemma 28* on the algebraic nonintegrability of *ovals* has had an unusually receiptio. He argues that the areas of *oval figures* are not expressible in finite algebraic equations. However, Arnold [Arnold,1989] pointed that if *oval* means *infinitely differentiable convex curve*, then Newton's claim is correct and his argument has the essential steps of a rigorous proof. Analyzing Kepler's law in two dimensions, we look Newton's discovered an astonishingly modern topological proof of the transcendence of Abelian integrals. In our paper we describe the two Newton's theorem and also some other theorems contained in the *Principia Mathematica* and partially suggested by Newton.

**Palavras-chave.**

Ovais, curva convexa, não integrabilidade algébrica.

**Keywords.**

Ovals, convex curve, algebraic nonintegrability

---

<sup>1</sup> Professor Titular de Física Geral e Aplicada, Mecânica Clássica e História da Matemática.

## INTRODUÇÃO.

Ao fazer a releitura de um manuscrito de Isaac Newton, o *De Moto Corporum in Gyrum*, entregue a Edmond Halley (1656-1742), o astrônomo e matemático real, quando este visitou Cambridge em 1684, encontrado nas publicações de John Herivel [Herivel, chap IX, p. 257, 1965] e Derek Thomas Whiteside [Whiteside, p. 30, 1974] e comparando com as revisões que aparecem nos *Principia*, me deparei com dois famosos teoremas matemáticos: a Proposição XXX seguida do Lema XXVIII. Os matemáticos da época, inclusive o próprio Halley, preocupados em compreender a Mecânica Celeste de Newton, não tomaram consciência da importância desses teoremas, em especial o Lema XXVIII; embora Johann Bernoulli (1667- 1748) tenha aceito como verdadeira a prova de Isaac Newton e a incorporou em um artigo de 1691 [Cohen, Nauenberg and Smith, 1999], G. W. Leibniz (1646- 1716) desconfiava da generalidade arrebatadora do lema e da extraordinária simplicidade de seu argumento [Pourciau, 2001; Pesic, 2001].

Fundamentalmente o fato é que Newton analisando a *2ª Lei de Kepler* em duas dimensões, demonstrou de forma surpreendentemente moderna a *transcendência das integrais abelianas* (Lema XXVIII). Essencialmente, a prova de Newton baseia-se na análise de uma determinada construção muito moderna (equivalente ao estudo de uma superfície de Riemann para curvas algébricas), dificultando seu entendimento entre seus contemporâneos.

Este artigo pretende apresentar uma transposição didática da Proposição XXX e do Lema XXVIII, resultados esses que além de seu valor histórico são importantes, uma vez que as *integrais abelianas* são ensinadas nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral.

## A VERIFICAÇÃO DOS TEOREMAS DE NEWTON.

**Teorema 1** (Proposição XXX – Problema 22).

*Encontrar, em qualquer tempo determinado, o lugar de um corpo que se move em uma dada parábola.*

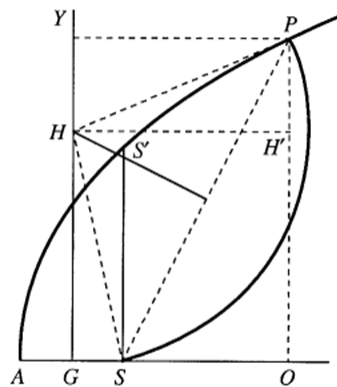


Figura 1

Seja  $S$  o foco e  $A$  o vértice principal da parábola e  $P$  a posição instantânea do corpo na parábola

$$y^2 = 4ax = 4AS \cdot x$$

Traçando uma perpendicular no ponto médio  $G$  do segmento de reta  $AS \in AO$  (eixo  $x$ ) e a normal a  $SP$  no seu ponto médio interceptando  $GY$  em  $H$ . Como o ponto  $P$  se move ao longo da parábola sob a ação de uma lei que varia com o inverso do quadrado da distância centrada em  $S$ , o ponto  $H$  move-se ao longo de  $GY$  com velocidade uniforme igual a uma fração da velocidade de  $P$  no vértice:

$$(AG)^2 + (GH)^2 = (GS)^2 + (GH)^2 = (HS)^2 = (HP)^2$$

Mas

$$(HP)^2 = (H'H)^2 + (H'P)^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2$$

$$(HP)^2 = (AO)^2 + (PO)^2 + \underbrace{(AG)^2 + (GH)^2}_{(HP)^2} - 2AO \cdot AG - 2PO \cdot GH$$

Logo

$$2PO \cdot GH = (AO)^2 + (PO)^2 - 2 \cdot AO \cdot AG$$

Como  $AO$  e  $PO$  representam na notação atual as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$ , pela equação da parábola dada

$$y^2 = 4AS \cdot x \Rightarrow (PO)^2 = 4AS \cdot AO \Leftrightarrow AO = \frac{(PO)^2}{4AS}$$

$$2AG = AS \Rightarrow AO \underbrace{AS}_{2AG} = \frac{1}{4}(PO)^2$$

$$2 \cdot AO \cdot AG = \frac{1}{4}(PO)^2$$

Inserindo esse resultado na equação

$$2PO \cdot GH = (AO)^2 + (PO)^2 - 2AO \cdot AG \Rightarrow$$

$$2PO \cdot GH = (AO)^2 + (PO)^2 - \frac{1}{4}(PO)^2 \Leftrightarrow 2GH = \frac{(AO)^2}{PO} + PO - \frac{1}{4}PO$$

$$2GH = \frac{\left(\frac{(PO)^2}{4AS}\right)^2}{PO} + PO - \frac{1}{4}PO = \frac{(PO)^2}{4AS} \frac{PO}{4AS} + PO - \frac{1}{4}PO$$

$$2GH = AO \frac{PO}{4AS} + PO - \frac{1}{4}PO = AO \frac{PO}{4AS} + \frac{3}{4}PO$$

$$2GH = AO \frac{PO}{4AS} + \frac{3}{4}PO$$

Mas isso pode ser modificado para uma forma alternativa permitindo abrir a “demonstração hermética de Newton”

$$2GH = AO \frac{PO}{4AS} + \frac{3}{4}PO \Rightarrow 2GH \cdot AS = \frac{POAO}{4} + \frac{3}{4}PO \cdot AS$$

$$2GH \cdot AS = \frac{POAO}{4} + \frac{3}{4}PO \cdot AS = \frac{PO}{4}(AO + 3AS)$$

$$2GH \cdot AS = \frac{PO}{4}(AO + 3AS)$$

Ou

$$2GH = \frac{3}{4} \left( \frac{4AOPO}{3 \cdot 4AS} + PO \right) = \frac{3}{4} \left( \frac{AOPO}{3AS} + PO \right)$$

$$\frac{4}{3}GH = \frac{1}{2} \left( \frac{AOPO}{3AS} + PO \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{AOPO}{AS} + 3PO \right)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{1}{6} (AOPO + 3POAS) = \frac{PO}{6} (AO + 3AS)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{PO}{6} (AO + 3AS) = \frac{PO}{6} [4AO - 3(AO - AS)] = \frac{PO}{6} (4AO - 3OS)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{PO}{6} (4 \cdot AO - 3 \cdot OS)$$

Mas  $AS \equiv a$ ,  $PO = y_P$  e  $AO = x_P$ , então

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{2}{3}POAO - \frac{POOS}{2} = \frac{2}{3}y_P x_P - A_{\Delta SOP}$$

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{2}{3}y_P x_P - A_{\Delta SOP}$$

Modernamente seria

$$\int_0^{x_P} y \, dx = \int_0^{x_P} (4ax)^{\frac{1}{2}} \, dx = 2a^{\frac{1}{2}} \int_0^{x_P} (x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left( 2a^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_0^{x_P} = \left( \frac{4}{3} \frac{(ax)^{\frac{1}{2}} x}{y} \right)_0^{x_P}$$

$$\int_0^{x_P} y \, dx = \frac{4}{3} y_P x_P \equiv \frac{4}{3} GHa$$

Então a equação  $\frac{4}{3} GHa = \frac{2}{3} y_P x_P - A_{\Delta SOP}$  é a área do setor parabólico  $ASP$ . Pela 2ª Lei de Kepler (a Lei das Áreas), a região varrida com centro em  $S$ ,

$$\frac{4}{3} GHa = \frac{h \cdot \Delta t}{2} = const$$

$$\frac{4}{3} GHa = \frac{h \cdot \Delta t}{2} \Rightarrow GH = \frac{3}{8a} h \cdot \Delta t \Leftrightarrow \frac{GH}{\Delta t} = \frac{3}{8} \underbrace{\frac{h}{a}}_{v_P} = const$$

A velocidade areolar de  $P$  em  $A$  é

$$\frac{GH}{\Delta t} = \frac{3}{8} v_P$$

Esse é resultado apresentado no Cor.II da Prop.30 [Newton, 2002]. No Cor. I da mesma proposição Newton conclui que  $GH : AS$  assim como o tempo no qual o corpo descreve o arco  $AP$  está para o tempo no qual o corpo descreve o arco  $AS'$

$$\frac{GH}{AS} = \frac{A_{ASP}}{A_{AS'P}}$$

A conclusão é dada no Cor.III da Prop. 30 [Newton, 2002], afirmando que é possível ser encontrado o tempo no qual o corpo descreve qualquer arco determinado  $AP$ , mostrando como deverá ser feita a construção geométrica.

Newton certamente conhecia a equação polar da parábola, sendo difícil imaginar que ele não tenha deduzido para si a solução para o problema dado<sup>2</sup>. Newton, no entanto, preferiu a presente demonstração, pois analisa o movimento ao longo de uma parábola a partir de uma construção geométrica semelhante à que ele cria para o movimento de uma elipse. Embora Isaac Newton tenha provado matematicamente o problema de Kepler (com base nas observações astronômicas de Tycho Brahe, o qual havia afirmado que os planetas descrevem *elipses*, de que o Sol ocupa um dos focos e que o raio vector, a linha que une o Sol ao planeta, descreve áreas iguais em tempos iguais) esses resultados não permitiam uma expressão das coordenadas em função do tempo. Então ele Newton vai propor aproximações iteráveis e apresentar um resultado, o Lema XXVIII, de grande relevo matemático.

<sup>2</sup> A área varrida é  $\frac{4}{3} AS \cdot GA$ . A velocidade areolar será  $(v_A)_a = \frac{4}{3} AS \cdot v_H$ . Em coordenadas polares, a velocidade do corpo no ponto  $A$  é  $v_A = r \cdot \dot{\theta}(t) = AS \cdot \dot{\theta}(t)$ . A velocidade areolar,  $(v_A)_a = \frac{1}{2} (AS)^2 \cdot \dot{\theta}(t)$ , portanto  $(v_A)_a = \frac{1}{2} v_A = \frac{1}{2} AS \cdot \dot{\theta}(t)$ ; logo,  $v_H = \frac{3}{4} \cdot \frac{(v_A)_a}{AS} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} (AS)^2 \cdot \dot{\theta}(t)}{AS} \therefore v_H = \frac{3}{8} v_A$ .

**Teorema 2** (Lema XXVIII).

*Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.*

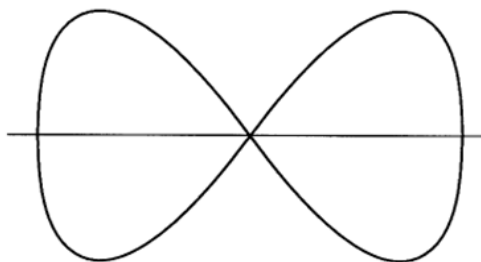
Newton encontra problemas para demonstrar desde o início. Em linguagem matemática moderna, Newton [Cohen, Nauenberg and Smith., 1999; Newton, 2002] essencialmente provou o seguinte:

*Não existe curva convexa suave (infinitamente diferenciável) tal que a área dividida por uma reta  $ax + by = c$  seja uma função algébrica de  $a$ ,  $b$ , e  $c$ . Uma curva plana é denominada *algébrica* (Newton denomina *geometricamente racional*) se ela satisfaz a equação  $P(x, y) = 0$ , onde  $P$  é um polinômio não nulo. Por exemplo, a circunferência dada pela equação  $x^2 + y^2 = 1$  é uma curva algébrica. Algumas curvas algébricas são as cônicas (Apolônio): elipses, hipérbolas, parábolas e curvas *singulares* como a lemniscata da forma*

$$y^2 = x^{m \cdot (n-1)} (a^2 - x^2)$$

Não confundir aqui com a *lemniscata de Bernoulli*. Um caso especial é a *lemniscata de Huygens*

$$y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$



**Figura 2**

Uma função é *algébrica* se sua representação gráfica é uma *curva algébrica*.

Newton no Lema trata de uma figura *oval*, ou seja, uma *curva convexa plana*, algebricamente integrável

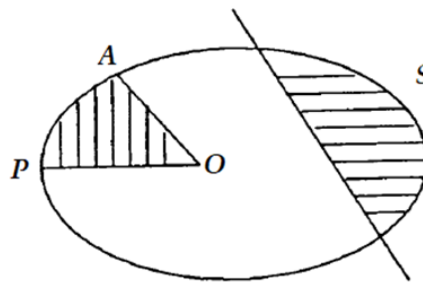


Figura 3

Se a área da região  $S$  é cortada por uma reta de equação  $ax + by = c$ , é da forma  $P(S, a, b, c) = 0$ , onde  $P$  é um polinômio não nulo. A área do setor curvilíneo  $OPA$  é uma função algébrica dos segmentos de reta  $OA$  e  $OP$  que definem o setor. O Lema estabelece um Teorema

### Teorema 3

*Toda oval algebricamente integrável tem pontos singulares: todas as ovais suaves são algebricamente não - integráveis.*

Seja  $SP$  o raio vetor girando continuamente ao redor de  $S$  com uma velocidade angular constante  $\omega$  enquanto  $R$  aumenta continuamente com a área varrida  $A(t)$ , Prop. 30, ou seja  $R = A(t)$ . Se  $R$  aumenta pela área do oval a cada revolução

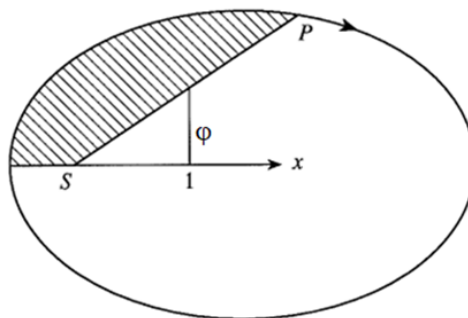


Figura 4

$$\frac{dA}{dt} = \text{const} = \frac{1}{2}h \Rightarrow R = \frac{1}{2}ht \Leftrightarrow \varphi = \omega t$$

Em qualquer evento, um corpo descrevendo um oval irá ocupar a mesma posição  $P$  para uma dada direção do raio vetor ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) por uma infinidade de vezes, em intervalos do período orbital. Toda essa infinidade de vezes não pode ser obtida a partir das raízes de uma equação algébrica de grau finito. Portanto, pelos mesmos argumentos o comprimento de arco de um oval não é algébrico. O Teorema pode ser demonstrado de outra maneira:

Seja  $SP$  o raio vetor, de origem em  $S$  e extremidade em  $P$  pertencente ao *perímetro do oval* o qual está em movimento de rotação. Se a *oval* é algebricamente integrável<sup>3</sup>, então a área varrida por  $SP$  deve ser uma função algébrica da tangente do ângulo de inclinação  $\varphi$  em relação ao eixo  $x$ . Se for permitido que  $SP$  gire ao redor de  $S$  para infinitas rotações, a área oval varrida por  $SP$  aumenta uma vez a cada revolução. Consequentemente, a área varrida, é uma função com valores múltiplos de  $\varphi$ , possuindo infinitos valores diferentes para a mesma posição de  $P$ . Mas uma *função algébrica* não pode ter valores múltiplos, uma vez que o número de raízes de um polinômio diferente de zero não pode exceder seu grau. Portanto, a área varrida não é uma *função algébrica* logo a *oval* não é algebricamente integrável.

## ALGEBRICIDADE LOCAL E GLOBAL.

Newton observa que um argumento semelhante prova que o comprimento do *arco de um oval algébrico suave* também não é algébrico. Erroneamente somos levados a concluir que *ovais algebricamente quadráticas* não existem; mas o próprio Newton conhecia exemplos de segmentos *ovais* cuja área é algébrica e mencionou alguns exemplos em relação ao seu teorema nos *Principia*. Um exemplo simples é fornecido pelo oval na figura de equação  $y^2 = x^2 - x^3$ .

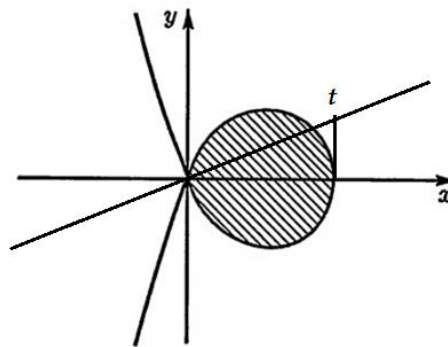


Figura 5

Podemos encontrar equações paramétricas dessa curva da seguinte forma. Considerando a reta de equação  $y = tx$ , que como sabemos, passa na origem do sistema de coordenadas. Ela encontra a *oval* no ponto  $P$  que satisfaz

$$y = tx \Rightarrow y^2 = x^2 - x^3$$

$$(tx)^2 = x^2 - x^3 \Leftrightarrow t^2x^2 - x^2(1 - x) = 0$$

<sup>3</sup> Funções associadas aos *ovais algébricos* são chamadas de *integrais abelianas*.



$$x^2(t^2 - 1 + x) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 + x = 0 \therefore x_p = 1 - t^2; y_p = t - t^3$$

Portanto

$$\begin{cases} x_p = 1 - t^2 \\ y_p = t - t^3 \end{cases}$$

A partir dessa representação paramétrica é possível inferir que a área dada por

$$A = \int_0^{x_p} y dx$$

Essa área é um *polinômio em t*.

$$y^2 = x^2 - x^3 = x^2(1 - x) \Rightarrow y = x\sqrt{(1 - x)}$$

$$A = \int_0^{x_p} y dx = \int_0^{x_p} x\sqrt{(1 - x)} dx \begin{cases} x = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - x \\ dx = -dt \end{cases}$$

A área

$$A = \int_0^{x_p} (1 - t) \cdot \sqrt{t} dt \equiv - \int_{x_p}^0 (1 - t) \cdot \sqrt{t} dt \Leftrightarrow A = \int_0^{x_p} (1 - t) \cdot \sqrt{t} dt$$

$$A = \left( \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right)_{x_p} \therefore \left( \frac{2}{3} x_p^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x_p^{\frac{5}{2}} \right)$$

Portanto uma região arbitrária definida pela intersecção da reta em dois pontos do *oval*, é *algébrica*, ou seja, a *oval* em questão é algebricamente quadrática.

Embora essa *oval* não seja suave, o argumento de Newton se aplica. Mostra que a área varrida pelo *raio vetor* não pode ser expressa por uma *função algébrica* única. Não há contradição; pois a solução, neste caso, é que toda vez que o *vetor raio* passa pelo ponto singular (*nó da oval*), o valor da área expressa por certas funções algébricas muda com um salto para outras funções algébricas. A fig.5 representa um *oval* algebricamente quadrática localmente. Como é conhecido, sabemos que uma *oval algébrica localmente quadrática* pode ter uma suavidade arbitrariamente grande, mas finita, isto é, pode ser representada em toda parte por funções com qualquer número prescrito de derivadas.

Na prática a integrabilidade algébrica local é quase tão genuína quanto a integrabilidade algébrica global. Portanto, pela própria apresentação da demonstração, Isaac naturalmente estava se perguntando se um *oval algebricamente suave*, seria *localmente integrável*. Em outras palavras, poderia a área *S* definida por um *segmento de corte*  $ax+by=c$  se uma função algébrica de  $(a, b, c)$  nas vizinhanças de todo ponto?

Usando o método desenvolvido para a fig.5, uma *oval* algebricamente integrável, com a tangente definida em todos os pontos, é suficiente para escolher um par adequado de polinômios. Considerando o *oval* da fig.6, uma curva contínua dada pelos polinômios dados por

$$\begin{cases} x = (t^2 - 1)^2 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

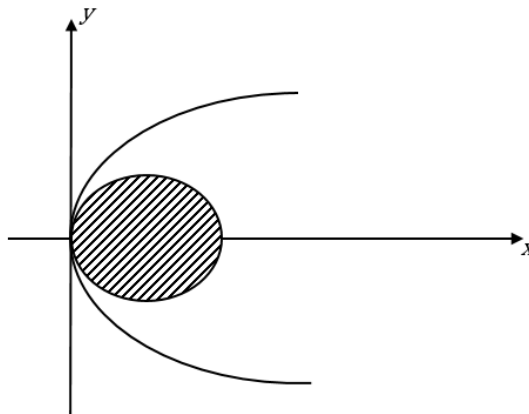


Figura 6

Obtemos um *oval* que parece uma curva completamente suave, isto é, algebricamente integrável localmente cuja integrabilidade global é excluída pelo argumento newtoniano (ARNOL'D, 1990)

#### TEOREMA DE NEWTON SOBRE A NÃO-ALGEBRICIDADE LOCAL.

Um *oval* integrável algebricamente pode ser arbitrariamente grande e suavidade finita, ou seja, pode ser definido em toda parte por funções com muitas derivadas arbitrariamente. Contudo existem casos em que existe um ponto singular da *oval* onde a derivada de alguma ordem é descontínua. Newton considerou curvas verdadeiramente suaves somente aquelas em que na vizinhança de todo ponto do gráfico a função pode ser expandida em uma série convergente

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$$

Tais curvas como sabemos são denominadas *analíticas*.

#### Teorema 4.

*Nenhum oval analítico é integrável algebricamente, mesmo localmente.*

Se uma *oval* fosse localmente integrável algebricamente, mas não globalmente, então a área varrida seria expressa por uma função algébrica na vizinhança de algum ponto e na vizinhança oposta, expressa por outra função algébrica. Mas para a *oval analítico* a área

varrida depende analiticamente da direção e sentido do raio vetor. Portanto ambas as funções algébricas podem se expandidas na vizinhança de um ponto dessa *oval analítica*, nas mesmas séries de potências convergentes. Ambas essas funções algébricas seriam coincidentes nas vizinhanças do ponto em questão. Então, elas seriam sempre coincidentes. Dessa forma, se um *oval analítico* localmente integrável existe, seria globalmente integrável algebricamente, o que é impossível, pois uma *oval analítica* não pode ser localmente integrável algebricamente (Teorema 3).

### ANALITICIDADE DE CURVAS ALGÉBRICAS SUAVES.

Uma curva é dita *suave infinitamente* se ela representa graficamente uma função que é diferenciável muitas vezes [Arnol'd, 1990].

#### Teorema 5.

*Uma curva algébrica suave infinitamente é analítica.*

Como Newton foi capaz de descrever a equação de qualquer ramo de uma curva algébrica na vizinhança de qualquer ponto, como uma serie de convergência rápida da forma

$$y = a_0 + a_1x^{\frac{1}{n}} + a_2x^{\frac{2}{n}} + a_3x^{\frac{3}{n}} + \dots, n \in \mathbb{Z}^+$$

Newton estabeleceu o Teorema sobre convergência de séries: *Quanto mais este resultado for desenvolvido para valores de  $x$  menores, maior será a aproximação para o valor verdadeiro de  $y$* , então a diferença entre esse valor e o valor exato de  $y$  será eventualmente menor do que qualquer quantidade [Whiteside, 1968]. As séries construídas são decorrentes do método desenvolvido para a *Regra do Paralelogramo* de Newton (Corolário I da Lei III do Movimento, *Principia*).

Assim para uma *curva algébrica infinitamente suave* existem apenas termos de expoentes inteiros na expansão, o que significa que a *curva é analítica*.

#### Corolário 1.

*Nenhuma oval algébrica infinitamente suave é integrável algebricamente, mesmo localmente.*

Significa que uma curva fechada convexa infinitamente suave não pode ser mesmo localmente integrável algebricamente se ela for algébrica. Por outro lado, uma *oval não algebricamente suave* não é integrável.

#### Teorema 6.

*Qualquer oval algebricamente integrável localmente é algébrico.*

Newton aparentemente considera esse fato como *obvio*, mas faz uma pequena consideração (provavelmente para aqueles que são matematicamente limitados):

**Lema**

*A envoltória de qualquer família algébrica de curvas é algébrica.*

Significa que se um conjunto de *tangentes a curva* satisfaz uma equação algébrica, então toda a curva em si mesma é algébrica. Nesse caso, considerando duas retas tangentes vizinhas tais que o coeficiente angular de suas inclinações em relação ao eixo  $x$  são  $m$  e  $m+h$ . Os pontos de intersecção descrevem uma curva algébrica  $m$  variando com  $h$  fixo.

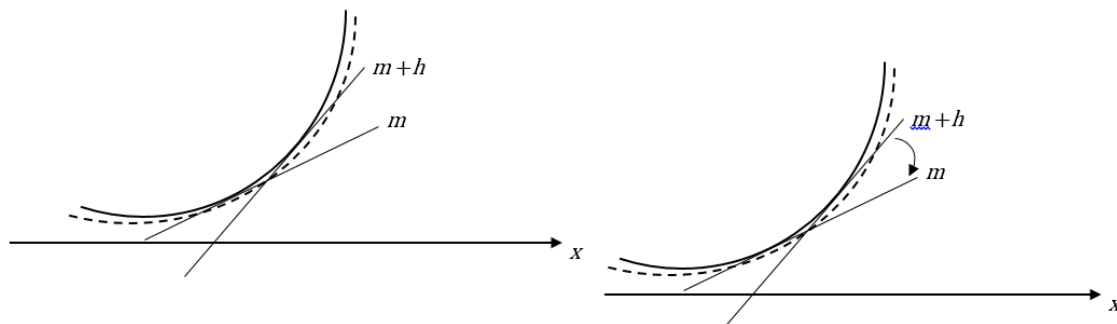


Figura 7

O grau dessa curva é definido pelo grau do polinômio, limitado por uma constante independente de  $h$ . Isso é consequência do fato de que a condição de compatibilidade de duas equações algébricas é expressa a anulação do polinômio em seus coeficientes, um fato explicado por Newton em sua demonstração de duas páginas [Newton, 2002; Cohen, Nauenberg and Smith, 1999]: *ao mesmo tempo que duas curvas algébricas com graus  $m$  e  $n$ , se interceptam no máximo em  $mn$  pontos*. Como  $h$  tende a zero, as tangentes vizinhas nos pontos de intersecção tendem a aproximação, portanto tendem a curva original. Assim como ela é o limite das curvas algébricas de grau limitado, a curva original também é algébrica.

Então o Teorema 6 fica provado, pois tangentes  $ax+by = 0$  de uma *oval algebricamente integrável localmente* satisfaz a equação algébrica  $P(a, b, c) = 0$ , portanto pelo Lema a *oval* é algébrica.

Newton observou também que, para garantir a não integralidade algébrica local, é suficiente exigir que os ramos conjugados de uma curva que tendem para o infinito, não se aproximem dos pontos de uma curva fechada. Ele obviamente tinha em

mente exemplos como os das fig 5 e 6, onde existem tais ramos conjugados. De fato, as palavras *tender ao infinito* não estão muito corretas pois o que é necessário é exigir que exista *auto-intersecções* [Arnol'd, 1990]. Uma condição suficiente para uma curva fechada satisfazer uma equação  $P(x, y) = 0$  e não ter auto-intersecção é o fato de que o polinômio  $P$  deve se anular exatamente em dois pontos de um círculo com centro em qualquer ponto da curva, se o raio do círculo for suficientemente pequeno.

Assim a *área total limitada pela auto-intersecção de uma curva algebricamente integrável localmente é nula*. Como exemplo, a *lemniscata* é *algebricamente integrável* somente porque seus dois *loops* oferecem contribuições opostas para a área total. Se nós deformarmos a *lemniscata* de modo tal que os valores absolutos das áreas dos *loops* sejam desiguais, então perde a propriedade de ser localmente integrável algebricamente [Arnol'd, 1990].

## CONCLUSÃO.

A demonstração de Newton sobre a *não integralidade algébrica de ovais* representa a primeira *prova de impossibilidade* na Matemática da nova era, o protótipo das futuras provas de insolubilidade de equações algébricas através de transformações algébricas dos radicais [Abel, 1827]. Assim, mostra os fundamentos mais profundos da confiança consciente de Newton no uso externo da geometria em suas demonstrações, não tanto por reverência aos antigos, mas para abranger a transcendência infinita que Descartes não podia compreender. Como tal, este lema é uma profecia brilhante da matemática transcendental moderna e a defesa final da geometria de Newton. Em comparação hoje aos comentários de seus sucessores, impressiona a modernidade de Newton em seu trabalho original, mais compreensível e mais rico em ideias do que as traduções devido aos comunicadores de suas considerações geométricas na linguagem formal do Cálculo de Leibniz e Cauchy.

## Referências bibliográficas.

ABEL, Niels Henrik. Recherches sur les fonctions elliptiques. Translated from the french by Marcus Emmanuel Barnes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2. p. 101, 1827.

AMADO, A. T. F. O método das primeiras e últimas razões ou o conceito de limite nos Principia de Newton. *Elementos de Matemática*, cap. 3, p.59. Santos (SP): Leopoldianum, 2005.

ARNOL'D, V. I. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*. Translated from russian by J. F. Primrose. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990.

ARNOL'D, Vladimir I.; VASIL'EV, V. A. Newton's Principia read 300 years later. *Current Science*, v. 61, n. 2, 1991.

ARNOL'D, Vladimir I; VASIL'EV, V. A. Newton's Principia read 300 years later. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 36 , n° 9, p.1148, November 1989.

BARON, Margareth E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. New York: Pergamon Press, 1969.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda , 1974.

CHANDRASEKHAR, Subrahmanyam. *Newton's Principia for the common reader*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

COHEN, I. Bernard; Nauenberg Michael and Smith, George E. *A Guide to Newton's Principia*. Berkeley (USA): University of California Press, 1999

HERIVEL, John. *The Background to Newton's "Principia"*. Oxford: Clarendon Press, 1965.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, Stephan. *Geometry and the Imagination*. New York: American Mathematical Soc- Chelsea Pu., 1999.

LEHMANN, Charles H. *Geometría Analítica*. Traducción Rafael Garcia Diaz, Ing. México: Limusa, 1962.

NEWTON, ISAAC. *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (3rd. edition. Translated by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, with the assistance of Julia Budenz. Berkeley (USA): University of California Press, 1999.

NEWTON, Isaac. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translated by Andrew Motte, revised by Florian Cajori. Great Books of the Western World, 1729.

NEWTON, ISAAC. *Principia: Principios matemáticos de Filosofía Natural I*, 3rd. edição. Traduzido da edição em ingles de 1729, por Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sonia Terezinha Gehring e Maria Helena C. Célio, São Paulo: Edusp, 2002.

NEWTON, ISAAC. *Principia; Principios matemáticos de Filosofía Natural II e III*, 3rd. edição. Traduzido da edição em ingles de 1729, por André Koch Torres Assis. São Paulo: Edusp, 2008.

PESIC, Peter. The Validity of Newton's Lemma 28, *Historia Mathematica* 28, p. 215, 2001.

POURCIAU, Bruce. The Integrability of Ovals: Newton's Lemma 28 and Its Counterexamples, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 55, nº 5, p. 479, 2001.

SPIVAK, Michael. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Houston: Publish or Perish Inc, 2010

WESTFALL, Richard S. *A biografia de Isaac Newton*. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

WESTFALL, Richard S. *Force in Newton's physics: the science of dynamics in the seventeenth century*. New York: American Elsevier Pu. Co. Inc., 1971.

WESTFALL, Richard S. *Never at Rest, a biography of Isaac Newton* (8<sup>th</sup> reprinted of first paperback edition). New York: Cambridge University Press, 1996

WHITESIDE, Derek T. *The Mathematical Papers of Isaac Newton Volume 2 1667-1670*. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

WHITESIDE, Derek Thomas. *The Mathematical Papers of Isaac Newton: Vol.: 6: 1684-1691*. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.

WHITESIDE, Derek Thomas. The pre-history of the *PRINCIPIA* from 1664 to 1666, *Notes Rec. R. Soc. London*, vol 45, p. 11-61, 1991.