

**POSSÍVEIS CORRELAÇÕES ENTRE MULTIFRACTALIDADE, VOLATILIDADE E PREVISÕES EM SÉRIE TEMPORAIS FINANCEIRAS**

Rodrigo Silva Ribeiro  
Graduando em Matemática – Uni-  
FACEF  
E-mail:

Prof. Dr. Antônio Carlos da Silva Filho  
Docente Centro Universitário Municipal  
de Franca – Uni-FACEF  
E-mail:

**RESUMO:** Uma das tarefas mais importantes em finanças é a compreensão e previsão dos preços dos ativos. Há uma grande diversidade de formas encontradas para compreender o comportamento do preço de um ativo; dentre elas, a observação das suas oscilações ao longo do tempo, entendendo quais são suas características. Vários estudos foram desenvolvidos e muitos fatos estilizados foram detectados nos retornos das séries temporais financeiras, como estacionariedade, não normalidade e caudas mais pesadas. Novos estudos apontam um possível novo fato estilizado, a multifractalidade. Com base no método *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MFDFA), procura-se caracterizar tanto os dados quanto o complexo gerador da série por expoentes de escala fractal e multifractal. Este comportamento multifractal foi identificado em séries como taxas de câmbio, preços de ações e índices de bolsas, entre outros, em vários trabalhos na literatura da área (chamada de Econofísica). Um artigo do orientador deste projeto correlacionou a volatilidade do preço de séries de Bitcoin (que é uma medida do risco associado à série) com parâmetros conhecidos como graus de multifractalidade, extraídos das séries através do MFDFA. O objetivo desta pesquisa é o de analisar alguns ativos do mercado brasileiro, a fim de poder ter elementos locais para corroborar ou não tal correlação. Foram usadas algumas séries diárias de ações do mercado brasileiro (VALE5, BBDC4, ITUB4) e o índice de ações IBOVSPA.

**Palavras Chaves:** Séries Temporais Financeiras. Multifractais. Volatilidade.

## 1 Introdução

Sabe-se que empresas se tornam bem sucedidas justamente por não evitar completamente o risco, mas detectando-o e explorando-o em proveito próprio. O vínculo entre risco e recompensa motiva a tomada de riscos ao longo da história e uma empresa que decide se proteger de qualquer tipo de risco provavelmente não gerará lucro para os seus acionistas. Uma das formas de detectar e explorar o risco é conhecendo e analisando as oscilações do ativo ou do grupo de ativos que se tem. No mercado financeiro, na maioria das vezes o risco é medido pelo grau de variabilidade dos retornos do investimento, ou seja, quanto maior as possíveis oscilações, maior será o risco do ativo.

Com a evolução dos estudos sobre o comportamento das séries temporais financeiras, surgiu uma nova abordagem chamada geometria dos fractais. Os primeiros passos sobre o tema foram desenvolvidos por um matemático polonês chamado Benoît Mandelbrot (MANDELBROT, 1975).

O termo “fractal” foi criado a partir do adjetivo latino fractus do verbo frangere, que significava quebrar. Quando se fala em geometria fractal, é afirmado que todos os objetos, fenômenos, teorias e significados complexos podem ser reduzidos, ou seja, dimensionados em unidades menores, a fim de explicá-los de forma mais simples. Essa ideia de dimensionar objeto em unidades menores foi aplicada inicialmente na geometria, sendo um avanço em relação à geometria euclidiana. Tal concepção visava mostrar que as coisas podem ser vistas em escalas cada vez menores, aumentando os detalhes e melhorando sua visualização.

O comportamento de escala fractal foi observado em muitas áreas como: física experimental, geofísica, fisiologia e até mesmo nas ciências sociais. No entanto, sabe-se que a maioria das bases de dados geradas na natureza e nas ciências sociais, como por exemplo, nos mercados financeiros, são sistemas complexos, que não estão em equilíbrio, assim não seria possível explicar seu comportamento através de um único expoente de escala. Isso porque quando se tem uma base de dados gerada por um sistema complexo, na maioria das vezes, encontramos dados em situações de desequilíbrio, que seguem relações de escala em várias ordens de grandeza. Essas relações permitem uma caracterização dos dados e do complexo gerador dessa série por expoentes de escala fractal ou multifractal, que podem servir como características para comparações com outros sistemas e modelos.

Em muitos casos, o comportamento de escala pode ser observado por muitos subconjuntos de fractais entrelaçados na série de tempo. Assim, será necessário uma multidão de expoentes de escala para uma descrição completa do comportamento da série e esse comportamento é denominado multifractal. O comportamento de escala multifractal foi observado pela primeira vez por Mandelbrot em seu livro “Les Objets Fractals: forme, hasard et dimension” (MANDELBROT, 1975) e confirmada por Mantegna e Stanley (1996); após essa data, vários autores testaram tal comportamento em várias áreas do conhecimento e constataram a existência de multifractalidade em várias séries de tempo e sua aplicação se deu com sucesso no mercado financeiro e nas séries encontradas na natureza.

Para o mercado de ações, vários autores como: Turiel e Perez-Vicente (2003), Turiel e Perez-Vicente (2005), Oświęcimka et al. (2005), Kwapien et al. (2005), Norouzzadeh e Jafari (2005), Su, Wang e Huang (2009), Wang, Liu e Gu

(2009), Dutta (2010), Benbachir e Alaoui (2011), Cajueiro, Gogas e Tabak (2009), Dutta, Ghosh e Chatterjee (2016), Grech (2016) e Maganini et al. (2018), concluíram que as ações e índices de vários mercados possuem características multifractais, inclusive o mercado brasileiro. Entender se uma série financeira possui ou não características de multifractalidade é interessante porque pode auxiliar usuários a modelar sua volatilidade.

Lux, Morales-Arias e Sattarhoff (2014) afirmam que modelar a volatilidade de séries temporais é de fundamental importância tanto para os profissionais de finanças como para os acadêmicos, porque permite desenvolver modelos aplicáveis para a gestão de riscos, precificação de ativos e alocação de uma carteira.

## 2 O método MFDFA

Os estudos sobre multifractais foram inicialmente pensados por Mandelbrot no ano de 1975 em seu livro intitulado “Les Objets Fractals: forme, hasard et dimension” (MANDELBROT, 1975). Neste livro o autor entende que muitas séries analisadas na natureza não podem ser explicadas através de um único expoente de escala e afirma que há evidências de multifractalidade para vários casos. Stanley et al. (1996) analisam a dinâmica do tamanho das empresas, tendo como diferencial do trabalho a análise dos dados ao longo de muitas escalas de tempo, em vez de apenas um único intervalo de tempo e Mandelbrot afirma que a análise multifractal é um novo tipo de prospecção de dados para analisar os ativos financeiros.

Com o passar do tempo foram criados vários modelos para se analisar as propriedades multifractais para séries temporais. Os mais utilizados são: o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, que é uma generalização do método DFA, idealizado por Kantelhardt et al (2002).

A metodologia do MFDFA fez-se presente nos últimos anos de maneira determinante na área de econofísica, através, por exemplo, dos trabalhos de Wang, Liu e Gu (2009), Zunino et al. (2009), Zunino et al. (2008), Oswiecimka et al. (2006), Ying, Xin-Tian e Xiu (2009), Oswiecimka et al. (2005), Matia, Ashkenazy e Stanley (2003). O método descrito foi largamente utilizado na literatura para análise. Segue-se uma exposição do algoritmo descrito originalmente por Kantelhardt [KANTELHARDT et al., 2002] e largamente utilizado na literatura.

Este algoritmo compreende seis etapas. Considere-se  $x_k$  uma série temporal de comprimento  $N$  e com suporte compacto, ou seja,  $x_k = 0$  somente para uma fração insignificante de valores.

Primeira etapa: Determina-se o “perfil”  $Y$ :

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Segunda etapa: Divide-se o perfil  $Y(i)$  em  $N_s \equiv \int(N/s)$  segmentos de comprimento  $s$  não superpostos. Frequentemente, o comprimento  $N$  das séries normalmente não é um múltiplo da escala  $s$  considerada e sobrar, inevitavelmente, uma pequena porção ao final. Para não desconsiderar esta pequena porção da série, repete-se o mesmo procedimento, mas começando do final para o início da série (na ordem inversa, portanto), ou, o que é equivalente, começando do ponto  $m+1$ , onde  $m$  é o resto da divisão de  $N$  por  $s$ . Assim, são obtidos  $2N_s$  segmentos no total.

Terceira etapa: Calcula-se a tendência local para cada um dos  $2N_s$  segmentos por uma regressão, usando o método dos mínimos quadrados. Após isso, determina-se a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

Para cada segmento  $v, v = 1, \dots, N_s$  and

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

Para  $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$ . Aqui,  $y_v(i)$  é o polinômio ajustado para o segmento  $v$ .

Quarta etapa: Realiza-se a média sobre todos os segmentos com o propósito de obter a função de flutuação de  $q$ -ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (4)$$

Neste ponto, a variável “ $q$ ” pode ter qualquer valor, exceto zero. As etapas 2 a 4 ser repetidas para diferentes escalas de tempo  $s$ .

Quinta etapa: Determina-se o comportamento de escala da função de flutuação através da análise de gráficos log-log de  $F_q(s)$  contra  $s$ , para cada valor de  $q$  (pois já é conhecido que fenômenos com invariância de escala obedecem a uma lei de potência [MANDELROT, 1998]).

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (5)$$

A função  $h(q)$  é conhecida como Expoente de Hurst Generalizado e tem um papel central no estudo da multifractalidade.

Sexta etapa: Eq. (5) pode ser escrita como  $F_q(s) = AS^{h(q)}$ , a partir da qual, tirando-se logaritmos dos dois lados, deduz-se que:

$$\log F_q(s) = \log A + h(q) \log s \quad (6)$$

Obtendo-se, assim, o valor do Expoente de Hurst Generalizado.

Sabemos que as séries temporais monofractais são caracterizadas por um único expoente de escala. Desta maneira, espera-se que o Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , seja independente de  $q$ . Esta diferença é o fundamento para a distinção entre os dois tipos de comportamento neste método:  $h(q)$  não varia com  $q$  para as series monofractais; porém, varia com  $q$  para as series multifractais. Este fato está embasado em que os diferentes fatores de escala para pequenas e grandes flutuações produzirão uma significativa dependência de  $h(q)$  em função de  $q$ . Estas diferenças são diferentes para diferentes valores de  $q$ : os valores de  $q$ 's positivos e os valores de  $q$ 's negativos. Assim, para valores de  $q$  positivos,  $h(q)$  descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações, enquanto que

para valores de  $q$  negativos, os expoentes de escala  $h(q)$  descrevem o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

Desta maneira, o método mais aceito pela comunidade científica para confirmar a multifractalidade nas series temporais é através da análise do seu espectro. Entende-se por espectro o conjunto dos valores para  $h(q)$  ou para  $\alpha(q)$ , onde  $\alpha(q)$  é obtido a partir de  $h(q)$  por uma transformação. Tal análise é baseada na relação entre o Expoente de Hurst Generalizado,  $h(q)$ , e o Expoente de Renyi,  $\tau(q)$  [GREEN et al., 2014] dada a seguir:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 - q(h(1) - 1) \quad (7)$$

Deduz-se da equação (7), fazendo-se uma transformação de Legendre:

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = \alpha(q) q - \tau(q) \quad (8)$$

Fazendo uso da Equação 6, define-se o grau de multifractalidade  $\Delta h$  como:

$$\Delta h = \max[h(q)] - \min[h(q)] \quad (9)$$

Uma medida alternativa do grau de multifractalidade pode ser obtida usando a Equação 8:

$$\Delta \alpha = \max[\alpha] - \min[\alpha] \quad (10)$$

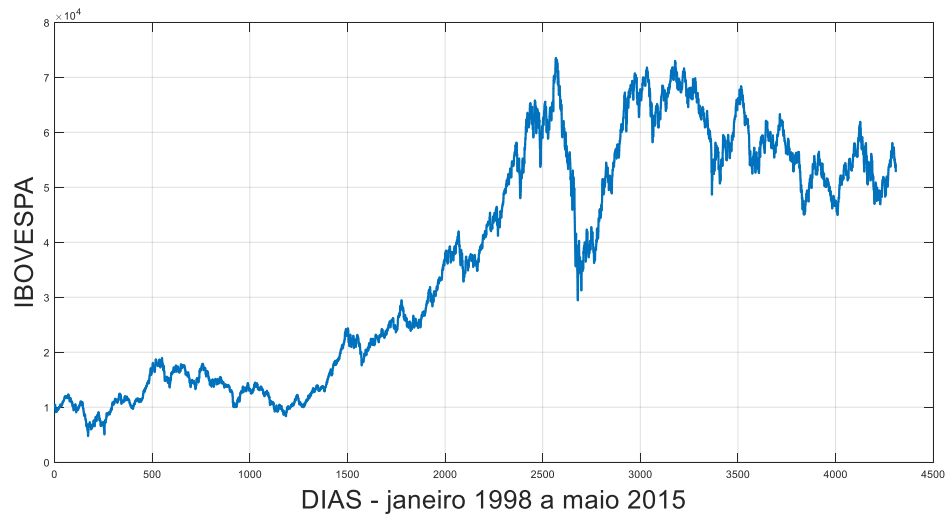
### 3 Dados

Foram utilizadas três séries de ações negociadas no mercado brasileiro: Vale do Rio Doce (VALE5), Itaú/Unibanco (ITUB4) e Bradesco (BBDC4), além do índice IBOVESPA. Todas as quatro séries abrangem o período que vai de janeiro de 1998 a maio de 2015, perfazendo um total cada uma de 4.308 dados. Para os cálculos foram utilizados os retornos destas séries,  $r(t)$ , definidos como  $r(t) = \ln[x(t)] - \ln[x(t-1)]$ . Os gráficos destas séries (e dos seus retornos) estão exibidos na seção de resultados.

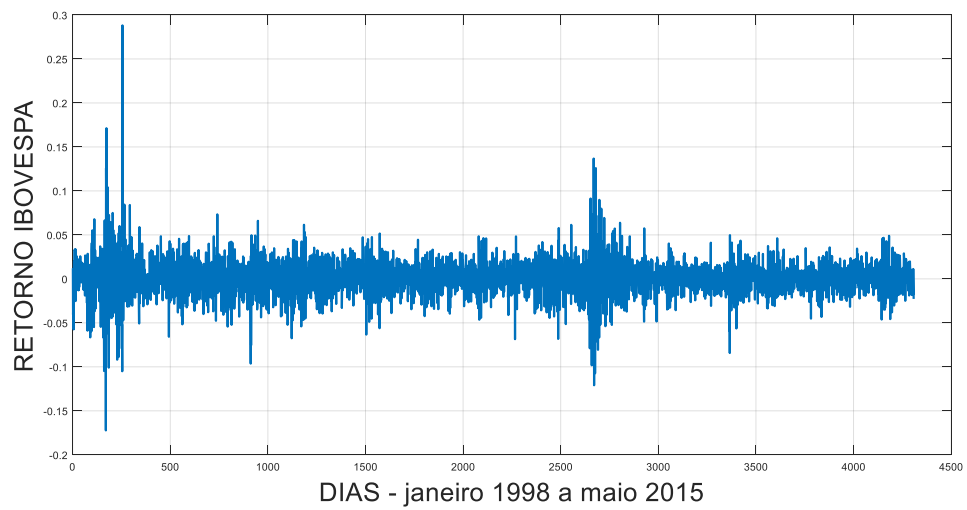
### 4 Resultados

Os gráficos das quatro séries e os seus respectivos retornos estão colocados nas figuras 1 a 8 a seguir.

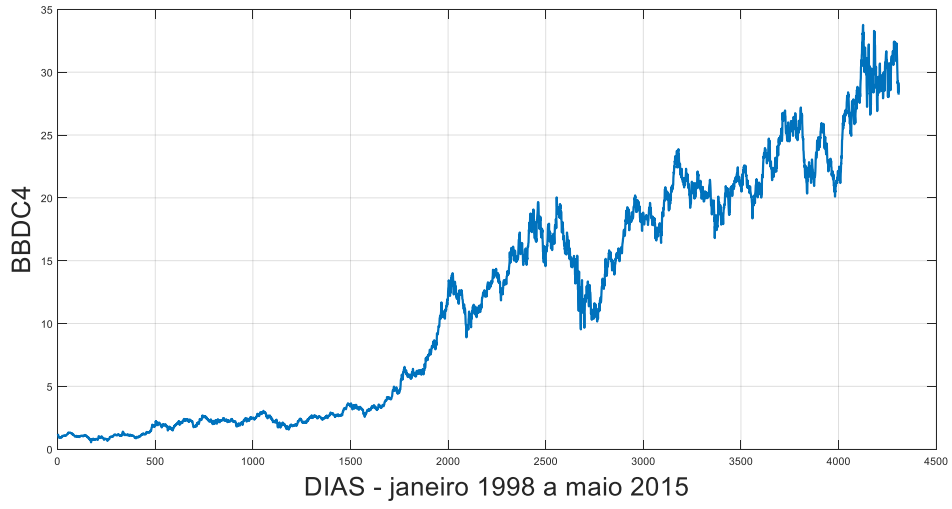
**Figura 1** – Série temporal do IBOVESPA



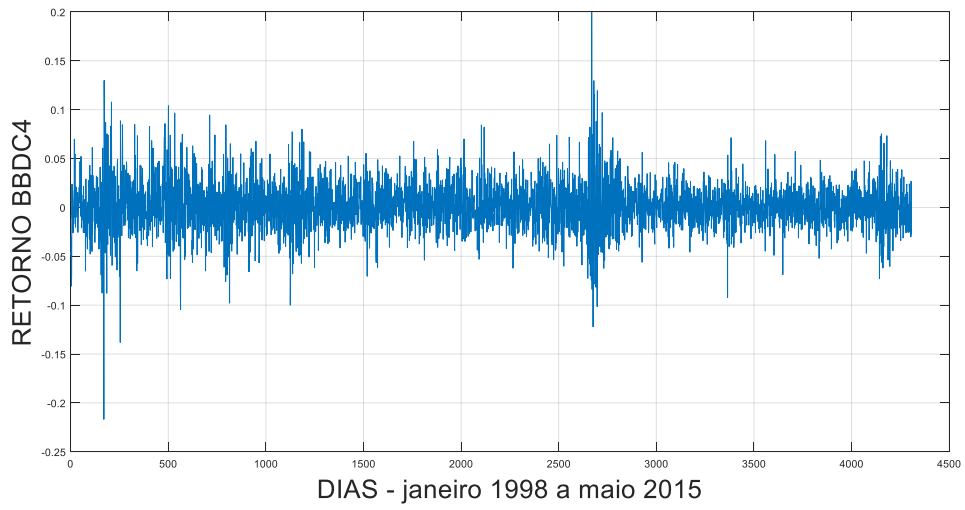
**Figura 2** – Série temporal dos retornos do IBOVESPA



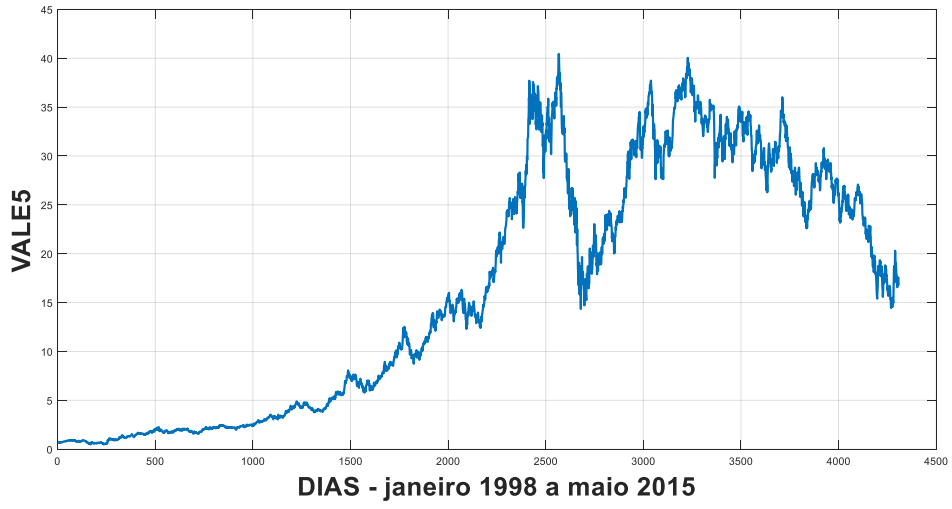
**Figura 3** – Série temporal do BBDC4



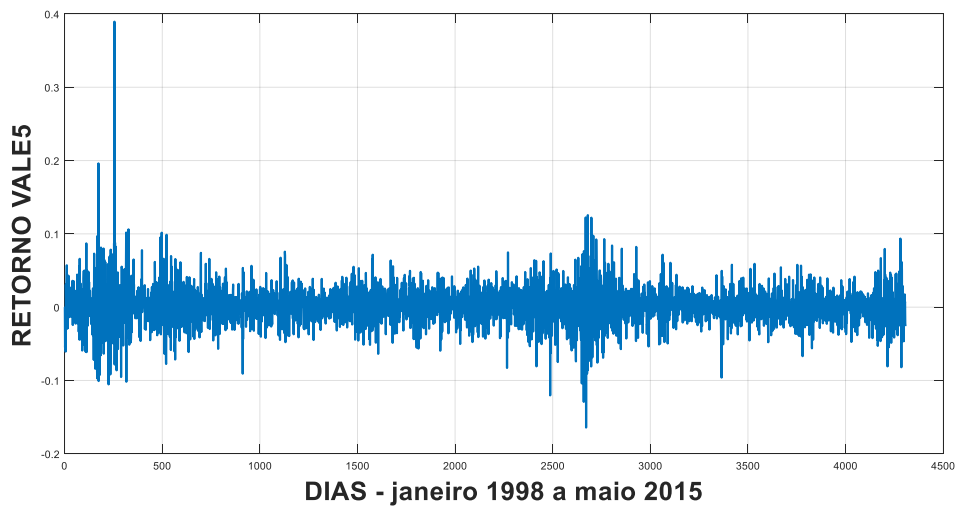
**Figura 4** – Série temporal dos retornos do BBDC4



**Figura 5** – Série temporal da VALE5

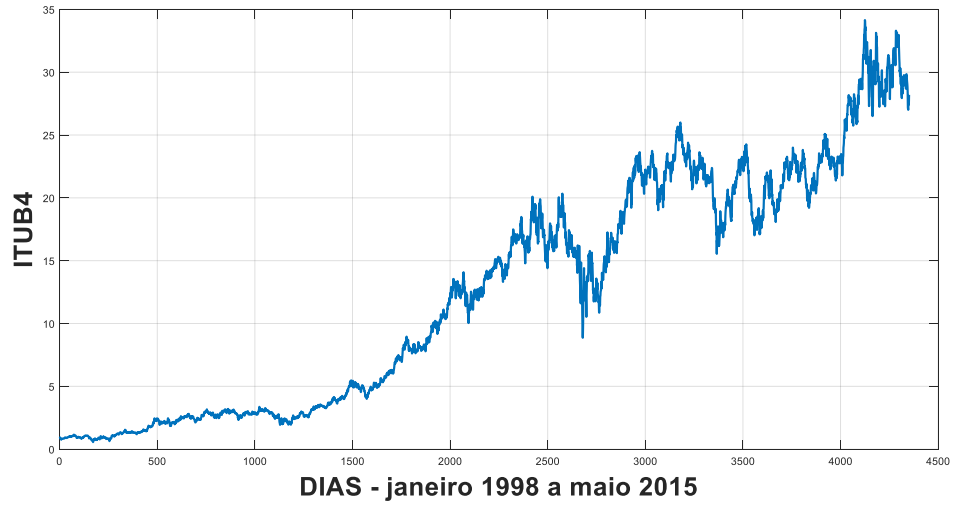


**Figura 6** – Série temporal dos retornos da VALE5

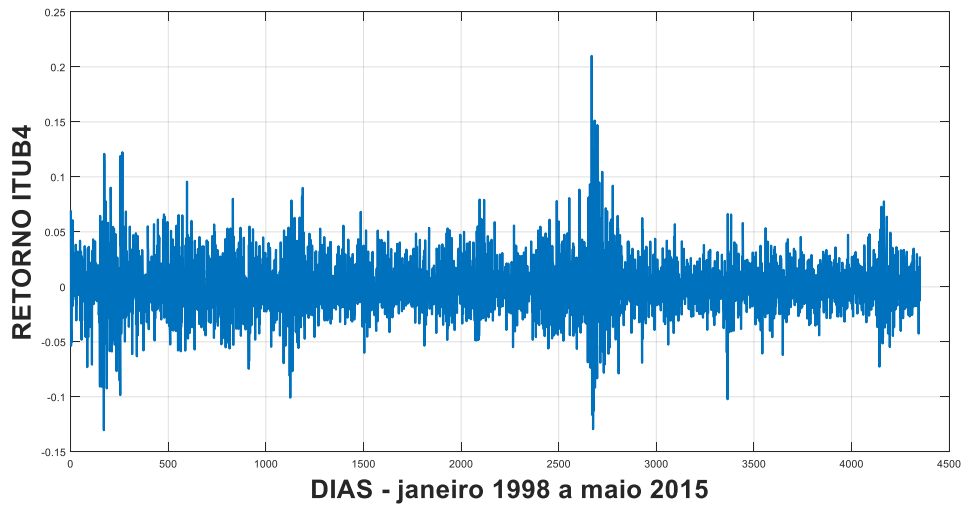


**Figura 7** – Série temporal do ITUB4



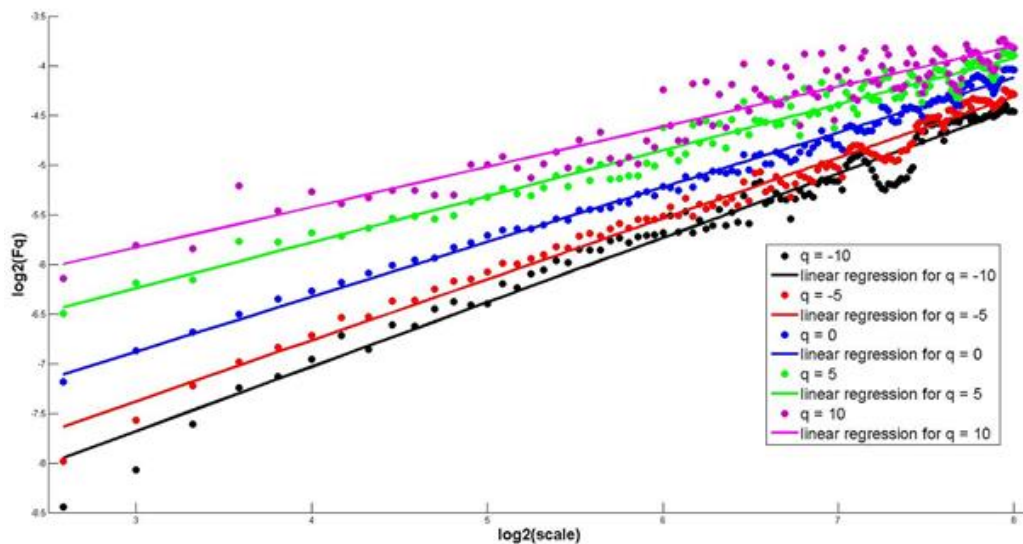


**Figura 8** – Série temporal dos retornos do ITUB4



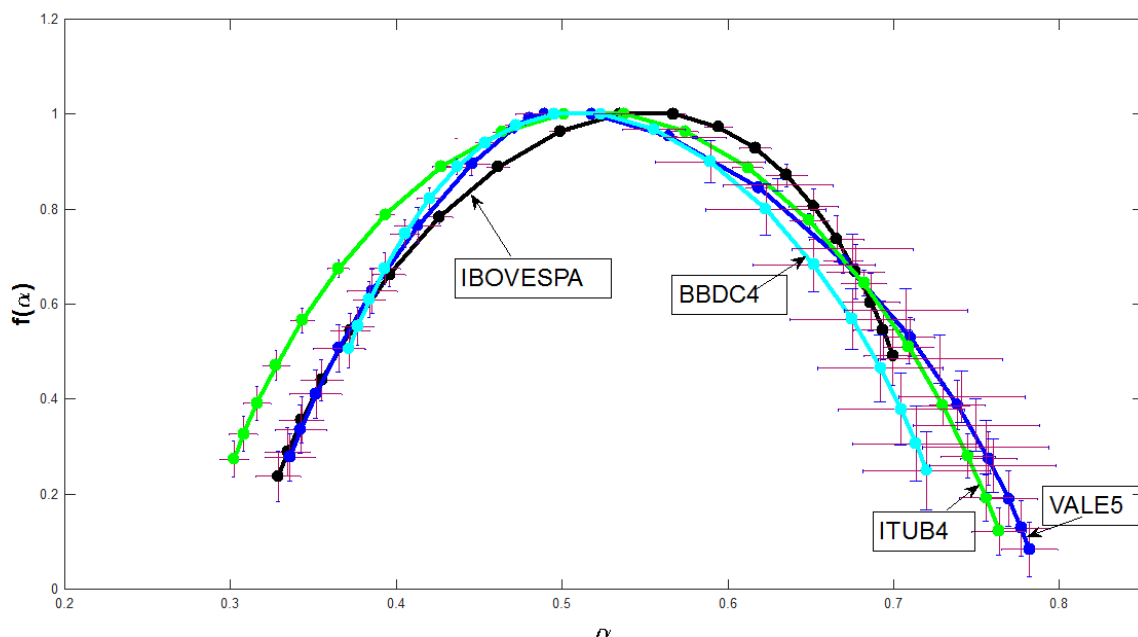
Um exemplo da análise de tendência das funções  $F_q$ , para a série do IBOVESPA, está na figura 9 a seguir:

**Figura 9** – logaritmo de  $F_q$  em função da escala



Um gráfico para exemplificar o cálculo do parâmetro multifractal  $\Delta\alpha$  está colocado (com barras de erro nos pontos) na figura 10 a seguir:

**Figura 10** – Espectro Multifractal dos retornos dos índices analisados ( $f(\alpha)$  x  $\alpha$ ).



A tabela 1 a seguir mostra os valores de  $\alpha$  e  $\Delta\alpha$  para as séries analisadas:

**Tabela 1.** Índice de Multifractalidade para os retornos dos índices analisados

	$\alpha$ max	$\alpha$ min	$\Delta\alpha$
<b>Ibovespa</b>	0,6995 (0.0174)	0,3288 (0.0138)	0,3707 (0.0312)
<b>VALE5</b>	0,7821 (0.0168)	0,3358 (0.0153)	0,4463 (0.0321)
<b>ITUB4</b>	0,7636 (0.0164)	0,3021 (0.0089)	0,4615 (0.0253)
<b>BBDC4</b>	0,7199 (0.0382)	0,3715 (0.0097)	0,3484 (0.0479)

Nota: Entre parênteses estão os desvios-padrões. Para  $\Delta\alpha$  a soma dos desvios-padrões de  $\max(\alpha)$  and  $\min(\alpha)$  estão em parênteses.

Sabe-se que a volatilidade é uma medida das flutuações de um ativo ou índice. Mas se este ativo ou índice apresenta grandes flutuações, isto não permite que se façam boas previsões sobre o seu comportamento. Quanto mais difícil de se fazer estas previsões, maior é o risco que este ativo ou índice apresenta ao investidor. Assim, uma medida para este risco é a volatilidade. A literatura em finanças apresenta várias medidas da volatilidade, mas usaremos aqui os retornos absolutos, como feito, por exemplo, em Ding et al. (1993). Os retornos absolutos, aqui denotados por  $r(t)$ , são definidos por:

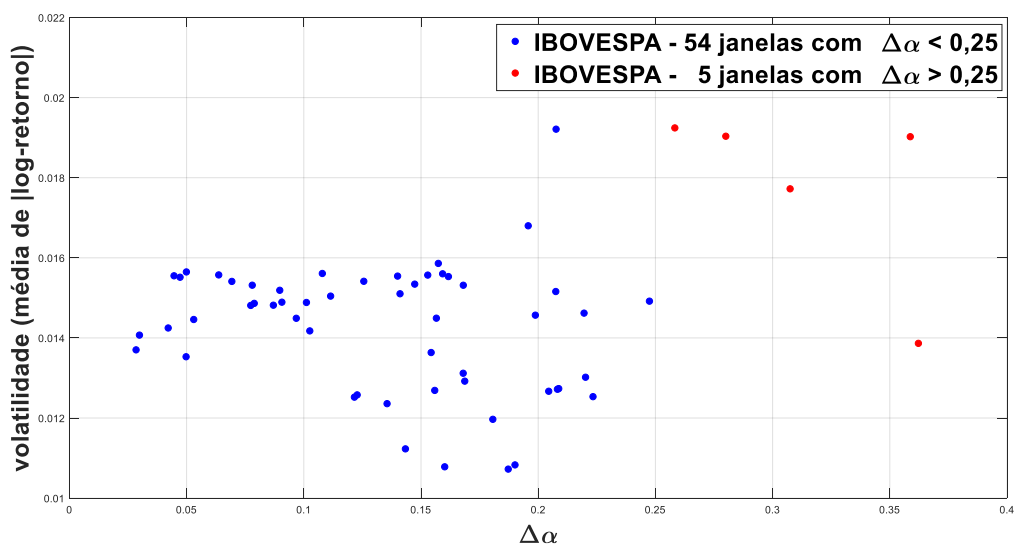
$$r(t) = \left| \ln \frac{x_i}{x_{i-1}} \right|$$

Vários trabalhos usam esta definição (ZUNINO et al., 2009). Como estamos interessados na medida do risco para um intervalo no tempo e esta medida de

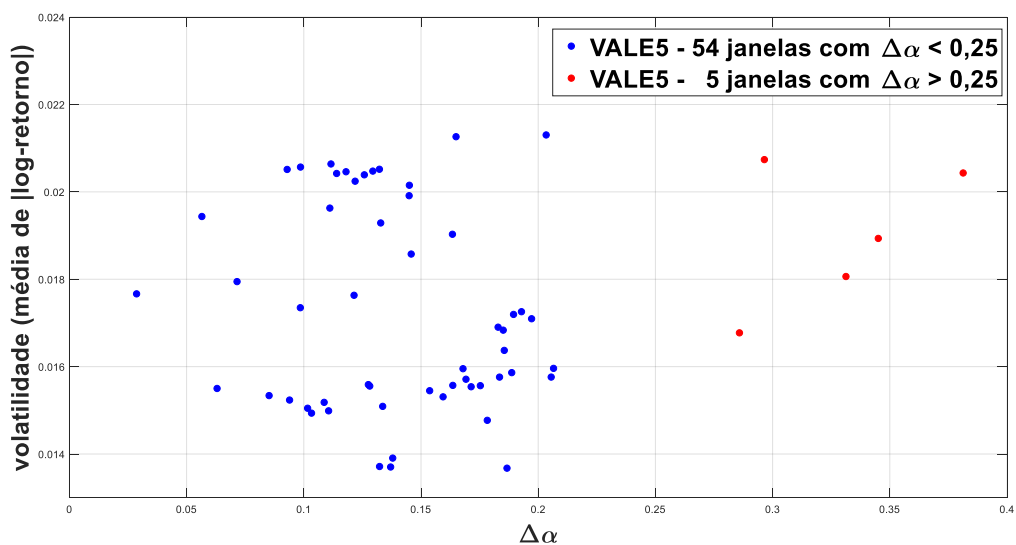
volatilidade é pontual, faremos uma média dos valores individuais da volatilidade correspondentes ao intervalo considerado. A seguir, vamos analisar se existe alguma correlação entre o grau de multifractalidade e as volatilidades.

Usaremos janelas com 1.000 valores de dados em cada uma e com uma distância de 50 valores entre duas janelas adjacentes, dando, nestes casos, um total de 59 janelas. Os resultados estão colocados nas Figuras 11-14 a seguir:

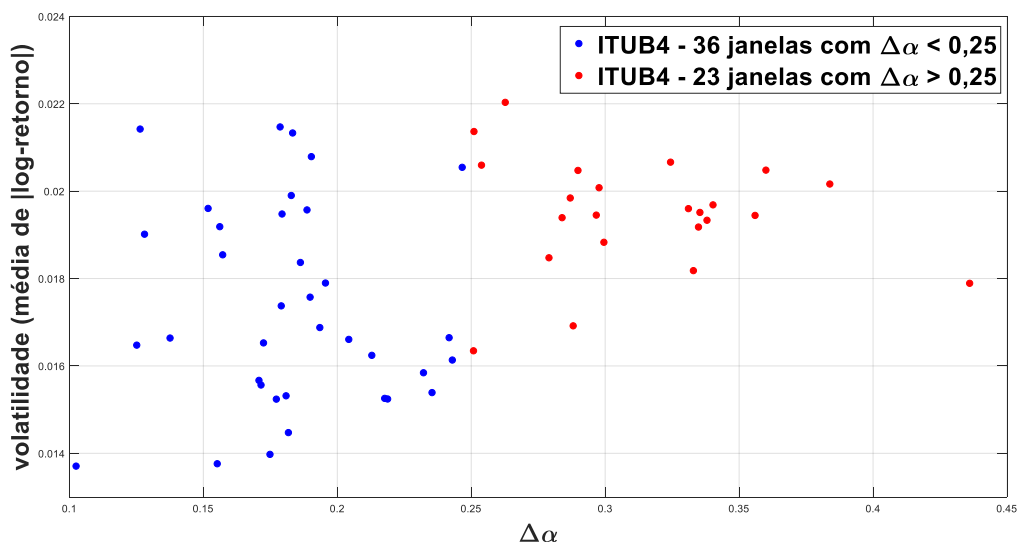
**Figura 11** – Volatilidade para o Ibovespa, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de  $\Delta\alpha$  em duas regiões.



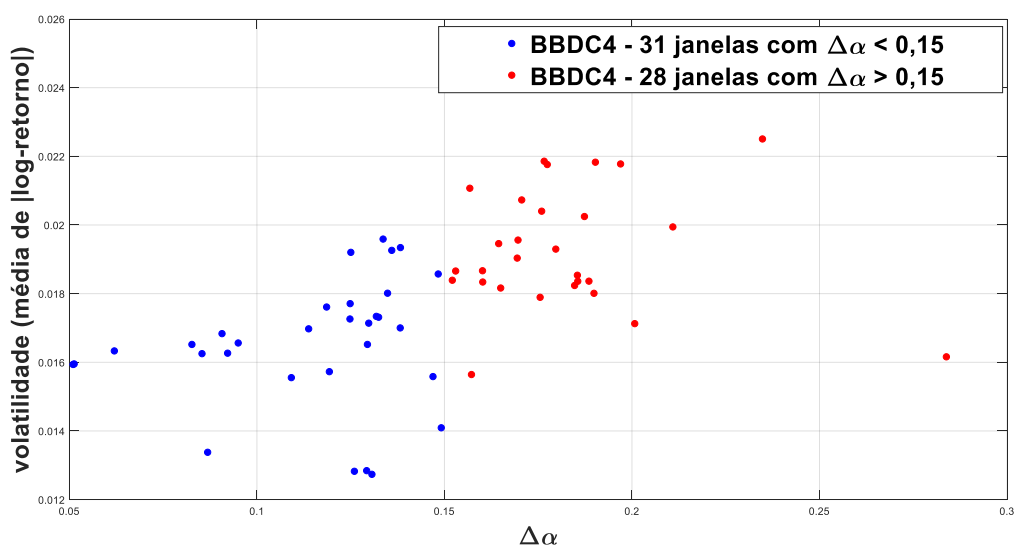
**Figura 12** – Volatilidade para a VALE5, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de  $\Delta\alpha$  em duas regiões.



**Figura 13** – Volatilidade para a ITUB4, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de  $\Delta\alpha$  em duas regiões.



**Figura 14** – Volatilidade para a BBDC4, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de  $\Delta\alpha$  em duas regiões.



Estas figuras exibem os resultados dividindo o gráfico em duas regiões. Nos casos de Ibovespa, VALE5 e ITUB4, o ponto de corte (arbitrário) foi o de  $\Delta\alpha = 0,25$  e no caso do BBDC4 o ponto de corte foi o de  $\Delta\alpha = 0,15$ . Acima destes valores, a volatilidade é mais alta, indicando, então, maior risco e menor confiança nas previsões.

## 5 Análise e Conclusão

Obtivemos os parâmetros multifractais para as quatro séries de índices analisados e calculamos a volatilidade para janelas móveis adjacentes para cada um dos quatro ativos. Encontramos que a partir de determinado valor (valor este que depende do ativo) de  $\Delta\alpha$  a volatilidade é mais alta, indicando que o grau de multifractalidade pode, sim, ser um indicador tanto da volatilidade quanto do risco associado a um determinado ativo.

## Referências

BENBACHIR, S., ALAOUI, M. E.. A multifractal detrended fluctuation analysis of the Moroccan stock exchange. *International Research Journal of Finance and Economics*, v. 78, p.6-15, 2011.

CAJUEIRO, D. O., GOGAS, P., TABAK, B. M.. Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. *International Review of Financial Analysis*, v.18, p.50-57, 2009.

DA SILVA FILHO, A. C.; MAGANINI, N. D.; ALMEIDA, E. F. Multifractal Analysis of Bitcoin Market. *Physica A*, v. 512, p. 954-967, 2018.

DAMODARAN, A. Gestão Estratégica do risco: uma referência para a tomada de riscos empresariais. Tradução: Félix Nonnenmacher. Porto Alegre: *Bookman*, 384p. 2009.

DING, Z., GRANGER, C., ENGLE, R. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, vol. 1, p. 83-106, 1993.

DUTTA, S.. Multifractal detrended fluctuation analysis of SENSEX fluctuation in the Indian Stock Market. *Canadian Journal of Physics*, v. 88, p.545-551, 2010.

DUTTA, S., GHOSH, D., Chatterjee, S.. Multifractal detrended cross correlation analysis of foreign exchange and SENSEX fluctuation in Indian perspective. *Physica A*, v. 463, p.188-201, 2016.

GRECH, D.. Alternative measure of multifractal content and its application in finance. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 88, p.183-195, 2016.

LUX, T, MORALES-ARIAS, L., SATTARHOFF, C. Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, v. 33, n. 7, p.532-541, 2014.

KANTELHARD, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN S.; BUNDE A.; STANLEY, H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*. v. 316. p 1-18. 2002.

KWAPIEN, J., OSWIECIMKA, P., DROZDZ, S.. Components of multifractality in high-frequency stock returns. *Physica A*, v. 350, p.466-474, 2005.

- LUX, T.; MORALES-ARIAS, L.; SATTARHOFF, C. Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, v. 33, p.532-541, 2014.
- MAGANINI, N. D., DA SILVA FILHO, A. C. e LIMA, F. G. Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. *Physica A*, v. 497, p. 458-471, 2018.
- MANDELBROT, B. Les Objets Fractals: forme, hazard et dimension. 2ed. Paris: Flammarion, 190p. 1975.
- MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 59 pp. 394-419, 1963.
- MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business*. 40 (4), pp. 393-413. 1967.
- MANDELBROT, B. Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk. New Haven: Springer. 1997.
- MANDELBROT, B. A multifractal walk down wall street. *Scientific American*. v.298, p.70-73. 1999.
- MANTEGNA R. N.; STANLEY, H. E. Turbulence and financial markets. *Nature*, v.383, p.587-588, 1996.
- OSWIECIMKA, P., KWAPIEN, J., DROZDZ, S., RAK, R.. Investigating multifractality of stock market fluctuations using wavelet and detrending fluctuation methods. *Acta Physica Polonica B* v. 36, p.2447-2457, 2005.
- STANLEY, M. H. R.; AMARAL, L. A. N.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LESCHHORN H.; MAASS, P.; SALINGER, M. A.; STANLEY, E. Can statistical physics contribute to the science of economics?. *Fractals*, v.4, n.3, p.415-425, 1996.
- SU, Z. Y.; WANG, Y. T.; HUANG, H. Y. A Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Taiwan's Stock Exchange. *Journal of the Korean Physical Society*, v.54, n. 4, p. 1395-1402, 2009.
- TURIEL, A.; PÉREZ-VICENTE, C. J. Multifractal geometry in stock Market time series. *Physica A*, v.322, p. 629-649, 2003.
- TURIEL, A.; PÉREZ-VICENTE, C. J. Role of multifractal sources in the analysis of stock Market time series. *Physica A*, v. 355, p. 475-496, 2005.
- WANG, Y.; LIU, L.; GU, R. Analysis of efficiency for Shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis. *International Review of Financial Analysis*, v.18, p. 271-275. 2009.
- YING, Y.; XIN-TIAN, Z.; XIU, J. Measuring multifractality of stock price fluctuation using multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A*, v. 388, p. 2189-2197. 2009.

ZUNINO, L.; TABAK, B. M.; FIGLIOLA, A.; PÉREZ, D. G.; GARAVAGLIA, M.; ROSSO, O. A. A multifractal approach for stock Market inefficiency. *Physica A*, n. 387, p. 6558-6566, 2008.

ZUNINO, L.; FIGLIOLA, A.; TABAK, B. M.; PÉREZ, D. G.; GARAVAGLIA, M.; ROSSO, O. A. Multifractal structure in Latin-American Market índices. *Chaos, Solitons and Fractals*, v.41, p. 2331-2340, 2009.

<https://congressosp.fipecafi.org/anais/17UspInternational/ArtigosDownload/478.pdf>  
- visualizado em 26/10/2021