

## SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS): uma aplicação da geometria analítica

Alessandra de Jesus Duarte  
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF  
alessandra.j.duarte@gmail.com

Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho  
Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF  
lucindarcoelho@gmail.com

### RESUMO

Durante as grandes navegações marítimas dos séculos XV e XVI, os portugueses e espanhóis se destacaram na busca por aprimorar as técnicas de navegação, desenvolver sistemas de localização e empreender viagens marítimas de longa duração. Passados mais de quatro séculos, o homem continuou a busca por melhorar e desenvolver novas tecnologias para o transporte: ferrovias, automóveis, aviões e grandes embarcações. Com o avanço da tecnologia foi criado o “GPS” como o primeiro sistema de localização via satélite. Esse trabalho tem por objetivo identificar e estudar os conceitos matemáticos envolvidos na tecnologia do GPS (Sistema de Posicionamento Global) e sugerir uma sequência didática com atividades que contemplem o conteúdo de geometria que possa ser aplicada ao Ensino Médio para motivar os alunos a uma aprendizagem mais significativa e contextualizada ao cotidiano. A metodologia foi baseada na pesquisa bibliográfica cuja fundamentação teórica de geometria analítica baseia-se em Anton e Rorres (2001); Callioli, Costa e Domingues (1990); Franco (2016); Lay (2007) e Steinbruch e Winterle (2007), para discorrer sobre o GPS foram realizadas revisões bibliográficas tais como Alves (2006); Carvalho (2009) e outros existentes sobre este tema. Esse trabalho contempla um conteúdo que não se restringe somente a Matemática, mas também um possível projeto interdisciplinar no qual pode ser trabalhado a física e a geografia.

**Palavras-chave:** GPS (Sistema de Posicionamento Global), Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Sequência Didática.

## ABSTRACT

During the great sea navigations of the 15th and 16th centuries, the Portuguese and Spanish stood out in the search to improve navigation techniques, develop location systems and undertake long-term sea voyages. After more than four centuries, man continued the search to improve and develop new technologies for transportation: railways, automobiles, airplanes and large vessels. With the advancement of technology, "GPS" was created as the first satellite location system. Thus, in this work, we will work to identify and study the mathematical concepts involved in GPS (Global Positioning System) technology and suggest a didactic sequence with activities that include the geometry content that can be applied to high school to motivate the students to a more meaningful and contextualized everyday learning. The methodology was based on bibliographic research whose theoretical foundation of analytical geometry is based on Anton and Rorres (2001); Callioli, Costa and Domingues (1990); Franco (2016); Lay (2007) and Steinbruch and Winterle (2007). To discuss about GPS, bibliographic reviews such as Alves (2006); Carvalho (2009) and others on this topic. This work contemplates a content that is not restricted to mathematics, but also a possible interdisciplinary project in which physics and geography can be worked on.

**Key-words:** GPS (Global Positioning System). Plane Geometry. 3D Geometry. Analytical Geometry. Didactic Sequence.

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos 500 anos o homem busca na ciência uma maneira de desenvolver novas tecnologias que o ajude nos afazeres do cotidiano: desde o transporte de cargas de um ponto a outro ou, até mesmo, se guiar por meio dos astros e estrelas.

O auge dessa busca pôde ser evidentemente confirmado com as grandes navegações dos séculos XV e XVI, em que portugueses e espanhóis se destacaram na busca por novos horizontes por meio da navegação marítima. Eles aprimoram as técnicas de navegação, desenvolveram sistemas de localização e empreenderam viagens marítimas de longa duração e com consideráveis distâncias percorridas. Iniciava-se um processo de criação e desenvolvimento de tecnologias voltadas para o traslado de cargas e pessoas, bem como o correto traçado de rotas e itinerários.

Passados mais de quatro séculos, o homem continuou a busca por melhorar e desenvolver novas tecnologias para o transporte: ferrovias, automóveis, aviões e grandes embarcações. Vivia-se a era do vapor. Nos últimos 130 anos houve uma explosão de tecnologias que permitiram ao “homem comum” ir além do que se imaginava no século XIX. Neste período, especificamente durante os anos 70, os militares americanos desenvolveram um sistema de posicionamento global baseado em referências que orbitavam em torno do planeta terra e, tal sistema, foi denominado *Global Positioning System*(GPS).

Findado o período da Guerra Fria e após alguns acontecimentos específicos que envolveram acidentes aéreos, o governo americano decidiu liberar aos cidadãos civis de todo o mundo a utilização de seu sistema de satélites para o posicionamento em tempo real. Contudo, mesmo após essa permissão, o custo de um receptor – aparelho necessário para a comunicação com os satélites por meio de ondas de frequência específica – ainda era alto.

Com o passar do tempo e a revolução na indústria dos componentes eletrônicos, o custo de receptores foi diminuído e, atualmente, o sistema de recepção vem integrado, por exemplo, aos aparelhos celulares do tipo *smartphone*. A presença desse componente em um aparelho celular permitiu que diversos aplicativos úteis ao cidadão comum pudessem ser utilizados: traçar a rota de uma viagem de automóvel, mapear uma atividade esportiva, encontrar um restaurante ou hotel durante uma viagem, solicitar um táxi e até realizar o pedido de um alimento para ser entregue em domicílio. Assim, é notória a importância dos receptores de sinais de satélites nos aparelhos celulares, pois, eles permitiram que um rol de aplicativos e ferramentas funcionais pudesse ser desenvolvido no sentido de facilitar o traslado de pessoas e a movimentação de cargas.

É no contexto citado anteriormente que este trabalho se encontra e tem como objetivo identificar e explicar os princípios básicos de funcionamento de um sistema de posicionamento por meio dos satélites elencando os conceitos matemáticos e físicos envolvidos nesta tecnologia. Além disso, sugerir uma seqüência didática de atividades pedagógicas voltadas ao público do ensino médio que permita a visualização do uso da geometria – analítica, plana e espacial - como base fundamental do sistema de posicionamento.

Então, para o desenvolvimento deste trabalho se optou por uma pesquisa

bibliográfica, pois, já existe um bom volume de informações documentadas e publicadas em formato de artigos científicos, monografias, dissertações e livros referentes à área. Há também fontes de informação voltadas ao entretenimento como vídeos explicativos, animações e documentários. Todas estas fontes de pesquisa.

O presente trabalho é justificável em função da quantidade de conceitos matemáticos e físicos envolvidos no sistema de posicionamento por satélites e, conforme pode ser verificado na bibliografia publicada, a abordagem dos conceitos teóricos pode ter um tratamento mais simplificado ou mais complexo em função do público alvo. Optou-se então por abordar e trazer referências que tinham o objetivo de esclarecer como o sistema funciona de uma maneira didática e mostravam os conceitos matemáticos envolvidos ligados à geometria.

O fator motivador para a construção deste trabalho foi o interesse em contextualizar a matemática ao cotidiano e valorizá-la como ferramenta fundamental para o desenvolvimento de novas tecnologias e utilizar isso como algo motivador para o ensino da mesma.

Assim, percebeu-se que o sistema de posicionamento é uma tecnologia atualmente difundida e que segundo Lima (2013) sua essência está repleta de aplicações conceituais: desde a geometria básica até a avançada, onde estão envolvidos conceitos de distâncias entre dois pontos; ângulos; circunferências; esferas; coordenadas esféricas; planos; triangulação; trilateração; sistemas lineares, dentre outros.

Na verdade este tema não se restringe somente a Matemática, mas também podem ser trabalhados a física e a geografia, podendo gerar projetos interdisciplinares e atividades pedagógicas em que conceitos de áreas diferentes podem ser aplicados com vistas em casos reais.

Por fim, este trabalho se encontra dividido em quatro capítulos, sendo o primeiro capítulo é sobre o sistema de posicionamento global, o segundo capítulo a geometria contida no sistema GPS, no terceiro capítulo tem-se a exploração de um aplicativo e sugestões de atividade e por fim o último capítulo as considerações finais.

## **2 O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL**

Neste capítulo estão expostos de maneira breve e simplificada o histórico e o modo de operação de um sistema de posicionamento global via satélites. Além disso, há uma breve menção sobre os erros possíveis e aplicações comuns nos dias atuais.

## 2.1 BREVE HISTÓRICO DO “GPS”

Segundo Lima (2013) desde a época do homem primitivo havia a necessidade da marcação da localização como, por exemplo, ao encontrar uma caverna ou buscar o alimento o homem se orientava por meio de árvores, montanhas, rochas e rios. Isso funcionava para pequenas distâncias, mas, conforme o tempo passava e o relevo se modificava, a orientação era perdida e em função da mudança dos referenciais.

Depois o céu tornou-se a referência apoiada por instrumentos de medição da elevação dos astros permitindo a determinação da latitude. A bússola foi uma grande descoberta de época que influenciou as grandes navegações e fornecia a direção a ser seguida a partir do ponto de localização (LIMA, 2013).

Ainda segundo Lima (2013) no período da Segunda Guerra Mundial foram utilizados instrumentos de precisão oriundos dos avanços tecnológicos da época e que empregavam conceitos físicos descobertos ou anunciados no século XIX; afirma o autor:

Durante a Segunda Guerra Mundial, ocorreu um grande avanço no que se refere a navegação, quando se passou a usar ondas de rádio para localizar veículos fazendo uso do efeito Doppler; esta propriedade da Física relaciona a velocidade do objeto móvel com a diferença entre a frequência com que as ondas de rádio incidem e a frequência com que são refletidas e, assim, determinavam-se as distâncias entre o veículo e as emissoras. Com essas três distâncias e a localização das emissoras era possível determinar, pelo processo de trilateração, três circunferências cuja interseção[...] determinava a localização do veículo. (LIMA, 2013, p.03)

Lima (2013) ainda mostra que na década de 50, com o início da “Corrida Espacial” e o lançamento de satélites soviéticos e americanos para a órbita do globo terrestre, surgiu o primórdio do sistema de posicionamento global por satélites baseado

no efeito Doppler: tal sistema oferecia localização bidimensional e podia ser aplicado a objetos móveis de baixa velocidade e, assim, ficou restrito à navegação marítima.

Carvalho e Araújo (2009) afirmam que em 1973, “o Departamento de Defesa dos Estados Unidos desenvolveu um sistema de posicionamento de alvos para fins militares. Surgiu, daí, o programa NAVSTAR/GPS” cuja abreviação significa *Navigation Satellite with Time and Ranging/ Global Positioning System*. Lima (2013) mostra que há uma “controvérsia” em relação aos responsáveis pelo projeto e que a autoria do mesmo é atribuída aos seguintes pesquisadores: o astrofísico Ivan Getting (1912 - 2003), o engenheiro Bradford Parkinson (1935 - atual) e o físico Roger L. Easton (1921 - 2014) (LIMA, 2013).

Carvalho e Araújo (2009) mostram o propósito militar do sistema:

O GPS surgiu com objetivos bélicos, ou seja, com o objetivo de facilitar os deslocamentos de tropas, a localização de tropas inimigas e a navegação de alta precisão para transporte militar e de mísseis. Seu uso foi testado na Guerra do Golfo, facilitando a locomoção das tropas no deserto. Os mísseis passaram a atingir seus alvos com erros mínimos. Em 1980, o então presidente Ronald Reagan (1911-2004) autorizou o uso civil do sistema. (CARVALHO E ARAÚJO, 2009, p. 158).

Os sinais enviados para receptores de uso civil continham uma distorção proposital para evitar que o sistema foi utilizado contra os próprios criadores. Contudo, com o avanço da tecnologia ligada ao universo da eletro-eletrônica e a redução de custos de aquisição de um receptor, nos anos 2000 o então presidente Bill Clinton promulgou decreto que retirava a distorção propositada e, assim, um cidadão comum podia ter acesso ao sistema e desfrutar de precisões de localização da ordem de 10 metros (LIMA, 2013; CARVALHO E ARAÚJO, 2009).

Atualmente, segundo INCRA (2013), o sistema de posicionamento global por satélites pode ser denominado pela sigla GNSS que significa *Global Navigation Satellite System*. Esta denominação é genérica e engloba as constelações de satélites lançadas por diversos países e que compõe a infra- estrutura espacial denominada SBAS (*Satellite Based Augmentation System*). Há também, segundo o mesmo autor, a infra-estrutura terrestre denominada GBAS (*Ground Based Augmentation System*). Ambos os conjuntos de infra-estrutura tem por objetivo garantir confiabilidade e precisão

ao sistema.

Ainda segundo INCRA (2013) as constelações de satélites em órbita terrestre têm nacionalidades diferentes e, assim, o GNSS é composto pelos seguintes sistemas:

- a) NAVSTAR-GPS (*NAVigation System with Timing And Ranging – Global Positioning System*), mais conhecido como GPS. Sistema norte-americano;
- b) GLONASS (*Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*). Sistema russo;
- c) Galileu. Sistema europeu;
- d) Compass/Beidou (*China's Compass Navigation Satellite System – CNS*). Sistema chinês.

Em relação ao SBAS temos os seguintes exemplos:

- a) WAAS (*Wide Area Augmentation System*). Sistema norte americano;
- b) EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay System*). Sistema europeu. (INCRA, 2013).

Os sistemas acima mencionados têm semelhanças com o primórdio NAVSTAR/GPS e são utilizados no auxílio da cobertura global para que um objeto na superfície da Terra possa se comunicar e ser localizado.

## 2.2 O FUNCIONAMENTO E OPERAÇÃO DO SISTEMA GPS

Segundo Lima (2013), o receptor GPS é um rastreador de satélites que procura e recebe sinais dos mesmos a qualquer momento do dia. De acordo com a precisão os receptores podem ser classificados em três tipos:

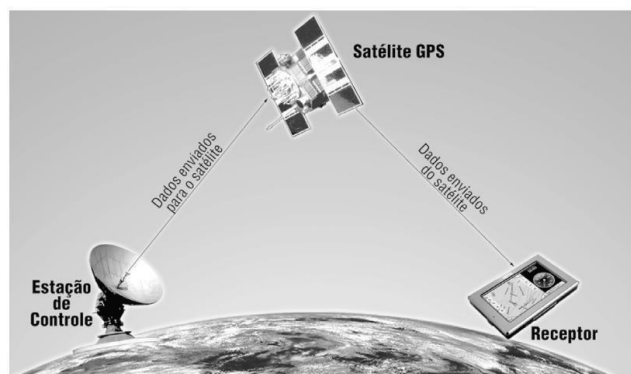
- Receptores de navegação: com erros na faixa de 15 metros;
- Receptores topográficos: com erros em torno de 1 metro;
- Receptores geodésicos: com erros aproximados de 1 centímetro;

Os satélites que orbitam sobre a Terra executam, aproximadamente, duas voltas por dia em torno da mesma, e qualquer desvio de rota pode ser corrigido pelas estações de controle. Assim, o sistema NAVSTAR/GPS é composto por três partes



(Figura 1): o segmento espacial (satélites), o segmento de controle e o segmento do usuário (receptores) (INCRA, 2013).

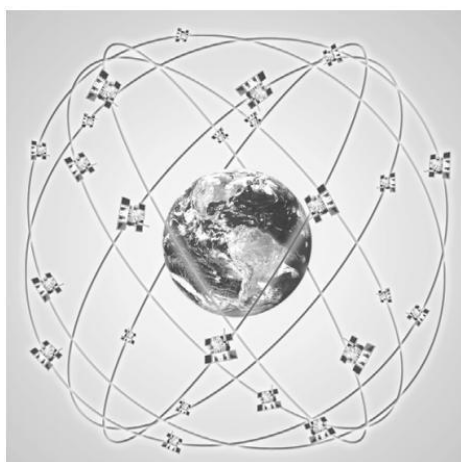
**Figura 1** – Segmentos do sistema NAVSTAR/GPS



Fonte: INCRA, 2013, p.163.

O segmento espacial (Figura 2) é composto por uma constelação de 24 satélites que giram ao redor da Terra. Eles estão distribuídos em seis planos de órbitas circulares em uma altitude de aproximadamente 20.200 km, em um período de 11 horas e 58 minutos e possuem uma inclinação de  $55^\circ$  em relação ao plano que contém a linha do Equador. Isso garante que no mínimo que quatro satélites estejam visíveis em qualquer lugar do planeta (PAZ, FERREIRA E CUGNASCA, 1998).

**Figura 2** – Distribuição dos 24 satélites do NAVSTAR em seis órbitas



Fonte: INCRA, 2013, p.163.

Ainda segundo os mesmos autores, cada satélite em órbita está equipado



com relógios de alta precisão:

Em cada satélite há 2 relógios de césio, e 2 de rubídio, altamente precisos, calibrados na frequência de 10,23 MHz. Na verdade, a frequência de ajuste é de 10,22999999545 MHz; a pequena diferença é para corrigir os efeitos relativísticos que fazem os relógios se adiantarem cerca de 38 $\mu$ s. (PAZ, FERREIRA e CUGNASCA, 1998, p. 30).

O segmento de controle é constituído por estações terrestre, cujo intuito é monitorar e corrigir possíveis erros de rota dos satélites (LIMA, 2013). As estações estão espalhas e localidades distintas do planeta:

Esse segmento é constituído por estações terrestres que ficam sob controle do Departamento de Defesa Americano. Elas têm o objetivo de monitorar, corrigir e garantir o funcionamento do sistema. O segmento possui um centro de controle e vários centros de monitoração de sinais dos satélites. Com base nesses dados, modifica parâmetros orbitais, caso seja necessário.

As estações de controle e monitoramento estão localizadas em Kwajalein, nas Ilhas Marshall; na Ilha de Ascension, no Oceano Atlântico; no Havaí; em Diego Garcia, no Oceano Índico; e no Colorado, Estados Unidos (a principal delas). As estações são de propriedade da Força Aérea Americana; além destas, o sistema GPS possui outras estações de monitoramento (INCRA, 2013, p.164).

Esta base de controle principal garante a correção de órbita do satélite, monitora os relógios e realiza reparos caso necessite e é inteiramente financiada pela Força Aérea Americana; também monitora estações secundárias (Figura 3) localizadas em outras partes do planeta.

**Figura 3 – Distribuição das estações de controle**



Fonte: Lima, 2013, p.4

Na última composição do sistema se tem o segmento dos usuários que corresponde aos receptores espalhados pelo mundo; eles podem variar de tamanho, modelo ou fabricante. Os aparelhos receptores (Figura 4) se diferenciam, principalmente, pela qualidade do sinal recebido, logo gerando posicionamentos e localizações mais precisos (CARVALHO e ARAÚJO, 2013).

Carvalho e Araújo (2009) ainda informam que os receptores têm armazenadas as coordenadas “extraídas de um documento cartográfico, de um relatório ou obtidas pela leitura direta de sua posição”. Segundo os mesmos autores, para formação de rotas é necessário haja uma combinação de pontos, ou seja, coordenadas da posição do receptor e coordenadas do destino desejado, assim, a unidade calcular uma rota informando previsões de tempo de chegada, por exemplo.

**Figura 4** – Distintos modelos de receptores de sinal



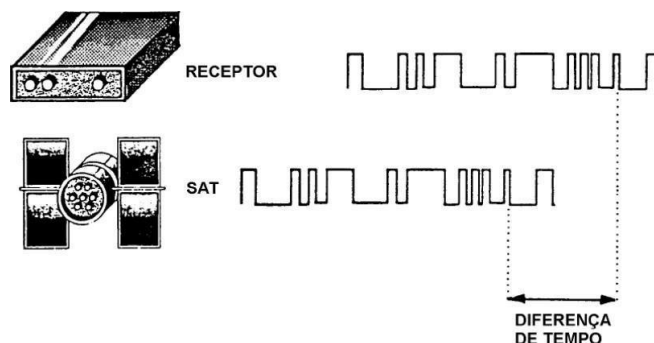
Fonte: Carvalho e Araújo, 2009, p. 165.

Carvalho e Araújo (2009) ainda informam que os receptores têm armazenadas as coordenadas “extraídas de um documento cartográfico, de um relatório ou obtidas pela leitura direta de sua posição”. Segundo os mesmos autores, para formação de rotas é necessário haja uma combinação de pontos, ou seja, coordenadas da posição do receptor e coordenadas do destino desejado, assim, a unidade calcular uma rota informando previsões de tempo de chegada, por exemplo.

Segundo Lima (2013) cada satélite emite sinais com modulação específica e em duas frequências permitindo a identificação do mesmo. Carvalho e Araújo (2009) afirmam que o sinal do satélite chega ao receptor com uma pequena defasagem de atraso e, este lapso de tempo, permite estimar a distância em que se encontra o satélite emissor do sinal (Figura 5). Para que este intervalo de tempo do atraso seja

contabilizado, tanto o satélite quanto o receptor devem estar munidos de relógios de precisão e, na prática, os receptores comuns não apresentam relógios atômicos com os dos satélites, contudo, eles já têm consigo um sistema de correção do horário de recebimento do sinal enviado.

**Figura 5** – Lapso de tempo de recepção do sinal emitido



Fonte: LIMA, 2013, p. 27.

Lima (2013) mostra que os relógios atômicos tem precisão de 1 nano segundo ( $10^{-9}$  s) e que esta precisão é necessária, pois, os sinais emitidos viajam à velocidade da luz ( $2,99792458 \times 10^8$  m/s) e que, usualmente, demoram 0,1 segundos para chegarem ao receptor. Assim sendo, atrasos da ordem de 1 microssegundo ( $10^{-6}$  s) podem causar erros de localização da ordem de 300 metros. Logo, a distância do receptor aos satélites emissores de sinais pode ser encontrada multiplicando-se o lapso de tempo da recepção do sinal pela velocidade da onda eletromagnética.

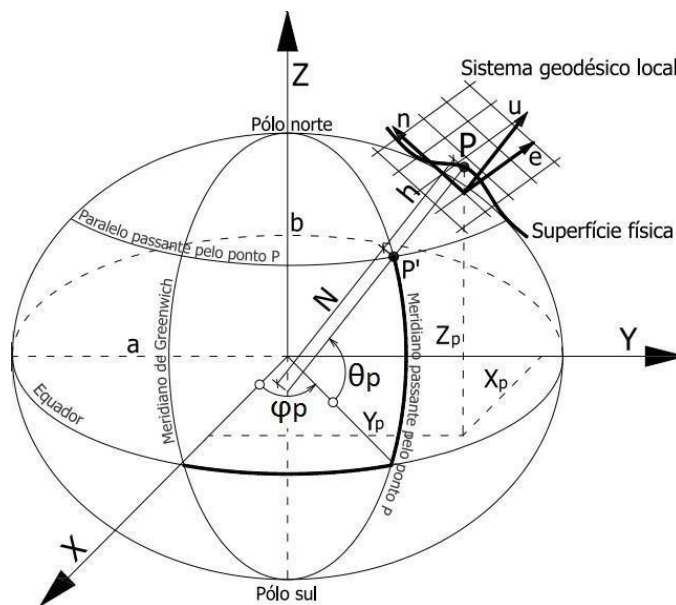
Já Alves (2006) afirma que o sinal emitido pelos satélites também informa ao receptor as coordenadas cartesianas em que ele se encontra no momento da emissão do sinal e, tal informação é denominada efeméride. Os satélites, ao emitir as efemérides, usam como referência o sistema de coordenadas geocêntricas cuja origem está no centro da Terra (Figura 6).

Lima (2013) afirma que conhecidas as distâncias de quatro satélites em relação à origem do sistema geocêntrico. Os satélites emissores serão assumidos com o centro de superfícies esféricas imaginárias cujos centros são os próprios corpos em órbita. Assim, essas quatro esferas se interceptam em um único ponto.

Carvalho e Araújo (2009) também afirmam que a interseção de 04 esferas

com centros conhecidos retornam o ponto em que se encontra o receptor e que, possíveis erros de medição do tempo por parte do receptor, são corrigidos e recalculados pelo próprio aparelho e, desta forma, a interseção de dessas quatro superfícies esféricas retornam com maior precisão a localização do objeto receptor (Figura 7).

**Figura 6** – Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas



**Legenda:**  $\theta_p$ : latitude do ponto P;  $\phi_p$ : longitude do ponto P; N: raio da Terra; h: altitude do ponto P'.

**Adaptado:** INCRA, 2013, p.30.

**Figura 7** – Exemplo de intersecção de esferas imaginárias



**Fonte:** Carvalho e Araújo, 2009, p. 170.

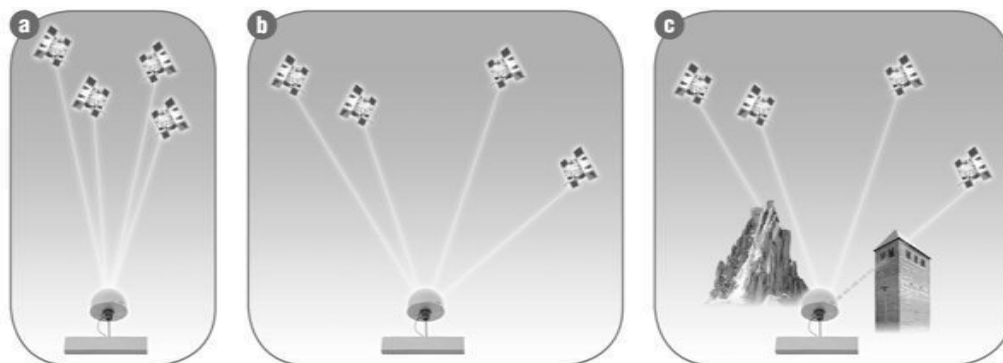
### 2.3 FATORES CAUSADORES DE ERROS NO SISTEMA GPS

Como todo sistema desenvolvido pelo homem está passível de erros, o GPS segundo Lima (2013), também pode cometer falhas que afetam a precisão da localização de um objeto e o receptor. Assim sendo, Lima (2013) lista alguns dos erros mais significativos:

- Desvios de sinais na atmosfera – o sinal sofre o desvio primeiro na ionosfera devido a partículas ionizadas e segundo a troposfera que possui grande quantidade de vapor de água, isso se dá pelo fenômeno da difração atmosférica.
- Erros na órbita do satélite – são causados pela atração gravitacional da Lua ou Sol e pela pressão da radiação solar sobre o satélite.
- Erro do relógio do receptor – com a imprecisão do relógio do satélite as quatro esferas não conseguem se interceptar em um único ponto.
- Erro de multi-caminho do sinal – quando de mais de um sinal originário da mesma fonte é recebido pelo receptor; provocado por obstáculos próximos ao receptor como, por exemplo, prédios ou árvores.
- Erro da geometria do satélite – é decorrente dos satélites estarem extremamente próximos uns dos outros sobre a vista do receptor. Assim as superfícies esféricas são quase coincidentes o que implica a interseção das superfícies serem uma área e não um ponto.

A figura 8 exemplifica os dois últimos erros listados e permite entender melhor como estes equívocos provocam leituras errôneas na localização do receptor.

**Figura 8** – Constelações de satélites e bloqueio de sinais



**Legenda:** (a) satélites próximos; (b) satélites afastados; (c) bloqueio de sinais e erro de multi-caminho

**Fonte:** Carvalho e Araújo, 2009, p. 175.

## 2.4 APLICAÇÕES GERAIS DOS SISTEMA GPS

A função primária do GPS utilizado por aeronaves, carros ou usuários de receptor portátil é a localização e navegação. Além disso, outras aplicações mais específicas e cunho técnico-científico por ser listadas, conforme menciona Alves (2006):

- Roteirista de viagens: além de retornar a sua posição ele também apresenta os principais pontos turísticos e hotéis;
- Monitoramento de abalos sísmicos: os movimentos sísmicos podem ser captados pela alteração do campo gravitacional que distorce as ondas de rádio e, assim, o GPS prevê possíveis terremotos;
- Meteorologia: os satélites colhem informações para a previsão e estudo de clima;
- Localização de resgate: equipes de socorro usam o GPS para guiar helicópteros e outros veículos até o local do acidente;
- Aplicação industrial: identificar, por meio de fotos, locais com infestações de pragas e combatê-las por um trator guiado pelo GPS usado na aplicação de defensivos agrícolas;
- Militar: retorna coordenadas de ataque, mísseis balísticos, defesa aérea, rastreamento de submarinos, localização de minas, etc;
- Segurança: monitoramento de trens, caminhão de carga ou algum veículo automotor de interesse;

É evidente que o uso do GPS é indispensável nos dias de hoje e auxilia



em diversos afazeres da atividade humana. Por fim, para concluir este capítulo, devem ser lembrados os aplicativos para *smartphones* que utilizam da tecnologia do GPS para ofertar serviços a usuários comuns: monitor de atividades físicas, pedidos de comidas e bebidas, serviços de transporte individual ou coletivo, informações meteorológicas, informações sobre o trânsito e interdição de vias, dentre outros.

### 3 A GEOMETRIA ANALÍTICA APLICADA AO GPS

Neste tópico serão apresentadas definições geográficas importantes que serão associadas a conceitos matemáticos da geometria e que são empregados no sistema do GPS. Segundo Lima (2013), podem ser explorados os conceitos ligados à localização geográfica (latitude, longitude, altitude, meridianos e paralelos) em conjunto com teoremas pertencentes à geometria plana, geometria espacial e geometria analítica. A correlação de conceitos de áreas diferentes explica o funcionamento do GPS e, além disso, permite visualizar o emprego da Matemática no processo de localização. Ferramentas como triangulação e trilateração aplicadas ao posicionamento de pontos em superfícies esféricas.

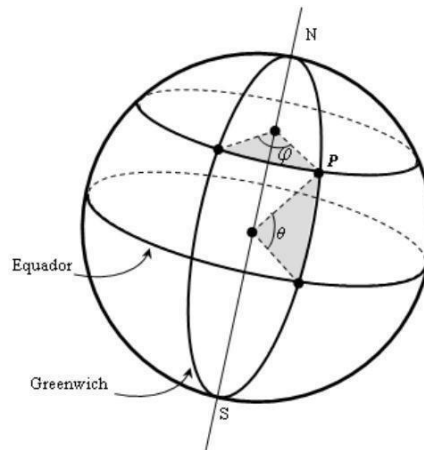
#### 3.1 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

O formato da Terra é semelhante à de uma esfera e, por questões de simplificação, o mesmo é adotado. Há um eixo polar que interliga os polos Norte (N) e Sul (S) no qual o planeta gira entorno deste eixo. O globo terrestre (Figura 9) pode ser dividido em segmentos denominados paralelos e meridianos. Um ponto P qualquer na superfície de uma esfera pode ter a posição descrita se conhecendo os ângulos  $\theta$  (inclinação em relação ao Equador) e  $\phi$  (arco formado no plano ortogonal que intercepta o eixo polar) (LIMA, 2013).

O plano que passa perpendicularmente ao eixo polar e que transpassa pelo centro da Terra é denominado plano do Equador e divide o planeta em duas partes: o hemisfério norte e o hemisfério sul. A circunferência determinada por este plano é chamada a linha do Equador. Os meridianos coincidem com as semicircunferências entre as extremidades dos polos. Um deles possui maior relevância, o chamado

meridiano de *Greenwich*, que por definição possui a longitude  $0^\circ$ . O plano que passa por este meridiano também divide o planeta em duas partes o hemisfério oeste (ocidente) e o hemisfério leste (orientado).

**Figura 9** – Localização do ponto P



**Legenda:**  $\phi$  é a longitude e  $\theta$  a latitude do ponto P.

**Fonte:** LIMA, 2013, p.7

As coordenadas geográficas de um ponto P que se encontra na superfície do globo podem indicar em qual hemisfério ele se encontra: a latitude  $\theta$  varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  no hemisfério norte e de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  no hemisfério sul. Já a longitude  $\phi$  varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  no hemisfério leste (orientado) e de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  no hemisfério oeste (ocidente). Para uma localização mais exata do ponto P de interesse ainda é necessário conhecer a altitude do mesmo, ou seja, se o ponto se encontra acima, abaixo ou no nível do mar. Altitudes positivas indicam que o ponto está acima e negativas apontam localização abaixo do nível do mar.

### 3.2 ESTUDO ANALÍTICO DAS SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Com base na premissa de que a Terra possui um formato esférico (na verdade a sua aparência aproxima-se de um elipsóide) é interessante conhecer e entender as principais características deste sólido geométrico. Muito dos modelos matemáticos que sustentaram o desenvolvimento do GPS tem origem na Geometria Analítica. Logo, algumas definições e conceitos importantes devem ser estudados:

- Superfície esférica e propriedades notáveis;
- Intersecção entre um plano e uma superfície esférica;

- A intersecção de quatro esferas de centros não coplanares;
- Correlação de coordenadas cartesianas geocêntricas com coordenadas geográficas (latitude e longitude);

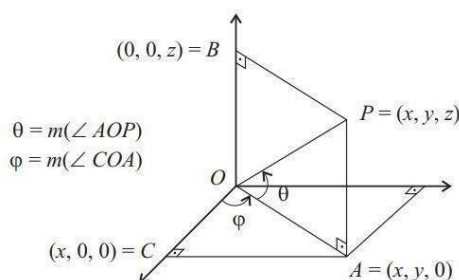
### 3.3 GEOMETRIA ANALÍTICA

A geometria analítica une a álgebra à geometria, a partir da álgebra, pode-se chegar a uma representação geométrica no plano ou no espaço e vice-versa e além de servir de base a diversas áreas da Matemática, Física, Engenharia e outras, são ainda protagonistas nos modernos Sistemas de Posicionamento Global - GPS.

Utilizando o sistema de coordenadas cartesianas vamos considerar como origem  $O$  corresponde o centro da Terra, o eixo  $O_z$  positivo apontando para a direção norte e negativo apontado para o sul, assim o plano  $O_{xy}$  como sendo o plano do Equador e o eixo  $O_{xz}$  é o plano que contém o meridiano de Greenwich, e o eixo  $O_y$  positivo cortando o meridiano tem a longitude  $90^\circ E$ .

Dado o ponto  $P = (x, y, z)$  no espaço e seja  $\theta$  e  $\varphi$  a abertura angular entre os planos que são representados na figura 10:

**Figura 10** – Representação do ponto no plano cartesiano em  $\mathbb{R}^3$



**Fonte:** ALVES, 2006, p.24

Com as medidas destes ângulos e o valor das distâncias pode-se determinar a localização deste ponto em três dimensões. Assim por estes cálculos é possível encontrar a posição da sua latitude, longitude e da altitude, em que se encontra o objeto no espaço, por meio do receptor GPS.

## 3.4 DISTÂNCIA EM UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Se o ponto  $P$  está na superfície terrestre, os valores de  $\Theta$  e  $\varphi$  corresponde exatamente à latitude e a longitude deste ponto. Considerando a distância entre a origem  $O = (0, 0, 0)$  e  $P = (x, y, z)$  e aplicando duplamente o Teorema de Pitágoras temos  $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a elevação deste ponto.

Agora considerando o raio da Terra para fins didáticos em ser aproximadamente 6400 km que para encontrar a sua elevação ou altitude de  $P$  é representado por  $h$  dado pela expressão:  $h = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r$ .

Diante dos três elementos: latitude, longitude e altitude obtêm-se as coordenadas geográficas de um ponto  $P$ . Relacionando estas as coordenadas cartesianas de  $P$  têm-se a seguinte relação analisando o triângulo retângulo  $\Delta OPB$  de acordo com a Figura 10.

$$\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

E como  $\cos 90^\circ - \theta = \text{sen}\theta$  temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Como  $\Theta$  varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  desta maneira  $z > 0$  assume o valor único entre  $0^\circ$  a  $90^\circ$  e quando  $z < 0$  este valor está entre  $-90^\circ$  a  $0^\circ$  e  $0^\circ$  é estabelecido pelo plano equatorial. Portanto quando  $P$  tem a latitude  $\Theta^\circ$  N (norte) ou  $-\Theta^\circ$  S (sul). Considerando o outro triângulo retângulo  $\Delta OAC$  obtêm-se a expressão:

$$\text{sen}\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Segundo Alves (2006), essa expressão acima define  $\varphi$  que varia de  $0^\circ$  a

$180^\circ$  e  $0^\circ$  por definição é o meridiano de Greenwich. Sendo assim quando  $y > 0$  a longitude P assume o valor de  $\varphi^\circ$  que varia entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  que é a parte E (leste) e se  $y < 0$  e o valor está entre  $-180^\circ$  a  $0^\circ$  a longitude P é  $-\varphi^\circ$  W (oeste).

Como abordado anteriormente, o Sistema de Posicionamento Global (GPS) trata-se de um conjunto de 24 satélites que orbitam em torno da terra, posicionados de tal forma que qualquer ponto da terra pode ser observado por no mínimo quatro satélites não coplanares. Cada um dos satélites transmite via rádio um sinal, que é recebido por um receptor (aparelho GPS) na Terra funcionando como um cronômetro extremamente exato.

Este receptor mede a diferença entre o tempo que o sinal que é recebido e o tempo que foi emitido. Utilizando a velocidade da luz ( $c = 2,99792458 \times 10^8$  m/s) e aplicando a fórmula  $d = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  pode-se encontrar a sua distância.

Desta maneira, o receptor calcula sua distância entre o satélite e o emissor do sinal. Assim podem-se considerar algumas informações relevantes para o cálculo em três dimensões:

- Com essa informação pode-se localizar um ponto  $P=(x, y, z)$  sobre uma superfície esférica imaginária com centro no satélite (efeméride) e raio  $r$  igual à distância encontrada.
- Cada um dos quatro satélites é programado para emitir o que se chama efeméride  $P_0 = x_0, y_0, z_0$ , que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.
- Dessa forma deseja-se que o ponto satisfaça a equação da superfície esférica representada por:

•

$$x - x_0^2 + y - y_0^2 + z - z_0^2 = r^2$$

A partir da premissa que a Terra pode ser considerada como uma superfície esférica para facilitar os cálculos, então considerando os seguintes conceitos:

- Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço

cuja distância a  $O$  é igual a  $r$  (raio).

- A intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada uma circunferência máxima da superfície esférica.

Pode-se destacar que em relação a Terra, a maior circunferência do plano perpendicular ao seu eixo de rotação é chamada Equador. As circunferências obtidas por meio da intersecção da superfície terrestre com planos paralelos ao plano que contém o Equador são chamadas de paralelos e as semicircunferências máximas que passam pelos pólos são chamadas de meridianos.

Qualquer ponto  $P$  na Terra pode ser determinado por suas coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  ou por suas coordenadas geográficas dadas por:

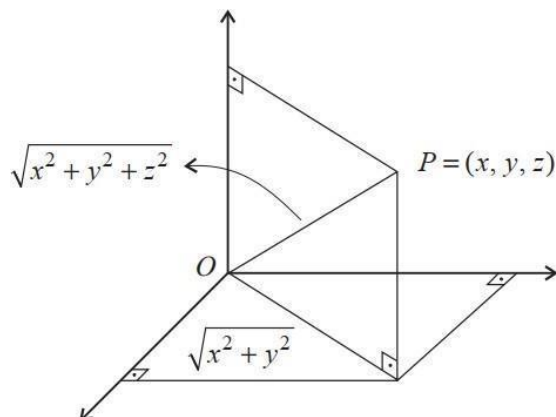
- Latitude: é a distância (em graus) ao Equador ao longo de um meridiano, podendo variar entre  $0^\circ$  a  $90^\circ$  para Norte ou para Sul;
- Longitude: é a distância (em graus) ao meridiano de Greenwich medida ao longo do Equador, podendo variar entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  para Leste ou para Oeste;
- Altitude: é a distância entre o ponto e a superfície terrestre ao nível do mar;

Considerando a superfície esférica em coordenadas cartesianas em três dimensões com origem em  $O$  e dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço com a do Teorema de Pitágoras representado na Figura 10 se pode encontrar a distância do ponto  $O$  à  $P$ .

A superfície esférica (Figura 11) de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto  $O$  é igual ao raio  $r$ .

**Figura 11** – A distância do ponto  $O$  até  $P$





Fonte: ALVES, 2006, p. 21

Desta forma, a distância do ponto O à P é representada pela equação:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{raio}$$

A distância entre os pontos  $P = (x, y, z)$  e  $C = (u, v, w)$  é dada por:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2} = r$$

Sendo que  $r$  um número real positivo e  $C$  um ponto fixado, então o conjunto de pontos cuja distância  $d(P, C)$  é igual a  $r$ , obtém-se uma superfície esférica  $S$  de centro  $C$  e raio  $r$  dado por:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$$

Esta equação acima é denominada equação reduzida da superfície esférica. Depois ao desenvolver os quadrados têm-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \text{ (equação geral)}$$

Logo, a equação tem a forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Onde a, b, c, d são números reais tais que:

$$a = -2u; \quad b = -2v; \quad c = -2w \text{ e } d = u^2 + v^2 + w^2 - r^2$$

Lembrando de que o valor r deve ser positivo para ser considerada uma equação da superfície esférica.

A seguir, vamos enunciar um teorema que garante a unicidade da localização determinada pelo GPS, ou seja, é o processo de trilateração (LIMA, 2013). Os quatro sinais emitidos pelos satélites formam quatro esferas a intersecção delas é dada por um único ponto.

**Teorema:** Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.

**Demonstração:** Sejam  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  superfícies esféricas de centros  $C_1 = x_1, y_1, z_1, C_2 = x_2, y_2, z_2, C_3 = x_3, y_3, z_3$  e  $C_4 = x_4, y_4, z_4$  respectivamente. Mostraremos que se  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$  e  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são não coplanares então  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$ .

Se  $(E_1), E_2, E_3$ , e  $(E_4)$ , abaixo são equações das superfícies esféricas  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ , precisamos mostrar que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \quad (E_1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \quad (E_2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \quad (E_3) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \quad (E_4) \end{aligned} \tag{1}$$

Tem solução única. Por hipótese, a intersecção das superfícies  $S_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  é um conjunto não-vazio e solução de (1). Resolvendo  $E_1 - E_2, E_1 - E_3, E_1 - E_4$  assim eliminamos os termos quadráticos e obtém um novo sistema linear (2) cujas equações representam os planos que contém as intersecções  $S_j \cap S_1$  (para  $j = 2, 3, 4$ ) então é solução do sistema (1).

$$\begin{aligned} a_1 - a_2x + b_1 - b_2y + c_1 - c_2z + d_1 - d_2 &= 0 \\ a_1 - a_3x + b_1 - b_3y + c_1 - c_3z + d_1 - d_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_1 - a_4 x + b_1 - b_4 y + c_1 - c_4 z + d_1 - d_4 = 0 \quad (2)$$

Esse sistema terá solução única se:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Com base na comparação da equação (1) e (2) têm-se que  $a_i = -2x_i$ ,  $b_i = -2y_i$ ,  $c_i = -2z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  e assim:

$$D = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Portanto, se os centros  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  não são coplanares temos que  $D \neq 0$ . Assim, fica demonstrado que esse ponto dado em coordenadas cartesianas e o sistema transformam em coordenadas geográficas aplicando às relações descritas a cima.

### 3.5 GEOMETRIA PLANA

Neste conceito estuda-se o comportamento de estruturas no plano e em duas dimensões como pontos, retos e planos, irão correlacionar geometria plana com o sistema do GPS podendo trabalhar o processo de trilateração para a determinação de uma posição, que se baseia em o uso de três circunferências cuja interseção é dada por um único ponto.

Na prática, o GPS faz uso de várias técnicas de refinamento e considera-se um grande número de fatores, incluindo o fato da Terra não ser totalmente esférica. Contudo, objetivo desse trabalho é mostrar apenas como os resultados dos cálculos pelo GPS e como são convertidos das coordenadas cartesianas retangulares para

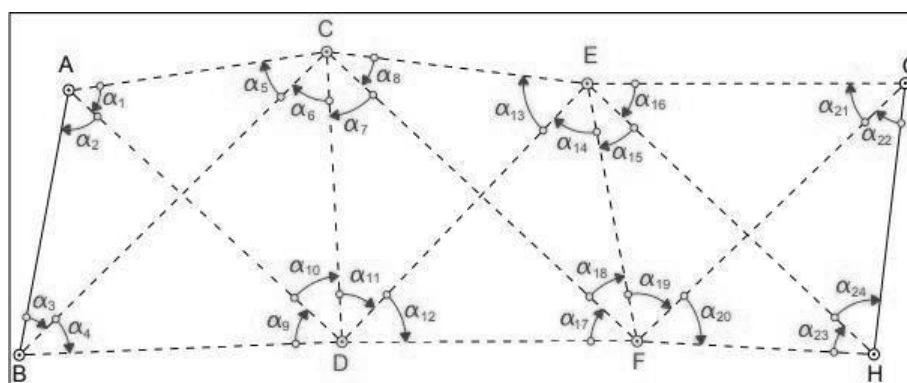
latitudes e longitudes. Isso se dá por meio da triangulação tridimensional, onde um ponto na superfície da Terra é determinado de modo único ao se conhecer suas distâncias a três outros pontos.

Uma das maneiras de se fazer os cálculos pode-se destacar:

- **TRIANGULAÇÃO:** a determinação de coordenadas, a partir do método da triangulação, é obtida por meio da observação de ângulos formados entre os alinhamentos de vértices intervisíveis de uma rede de triângulos (Figura 12).
- **TRILATERAÇÃO:** o posicionamento por meio da trilateração é baseado na observação de distâncias entre os vértices intervisíveis de uma rede de triângulos (Figura 13).

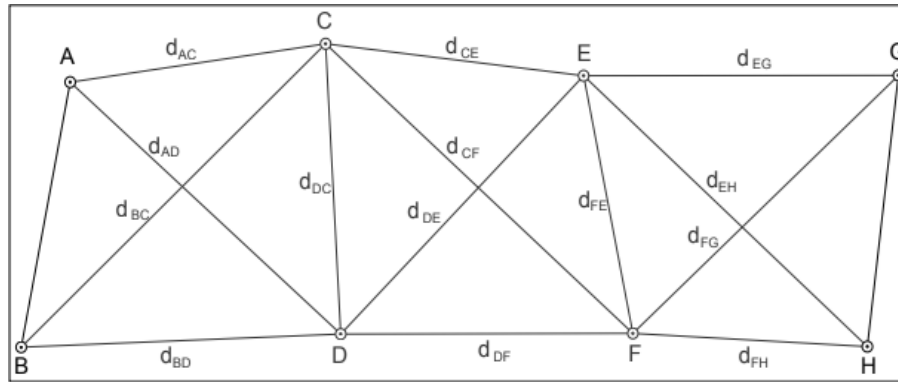
Estes dois processos de triangulação e trilateração auxiliam nos cálculos para uma melhor precisão e exatidão em que o usuário do GPS se encontra, são utilizadas para a medição de porção de terra na agrimensura, que é dado exatamente às coordenadas dos pontos e para se realizar os cálculos de áreas e isso é possível pela distância de cada satélite ao receptor esteja próximo.

**Figura 12 – Representação da Triangulação**



Fonte: INCRA, 2013, p.16.

**Figura 13 – Representação da Trilateração**



Fonte: INCRA, 2013, p. 16

## 4 FERRAMENTAS DE APOIO EAPLICAÇÕES

### 4.1 PRÉ-REQUISITOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS PARA O FUNCIONAMENTO DO GPS

Como foi mostrado anteriormente no capítulo 2 podemos retomar os seguintes conceitos matemáticos sobre a geometria:

- Geometria plana: planos, circunferências, distâncias entre dois pontos, trilateração e triangulação.
- Geometria espacial: conceito de esferas e suas características, planos e superfícies esféricas.
- Geometria analítica: superfícies esféricas e coordenadas cartesianas, a relação matemática entre ambas, distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

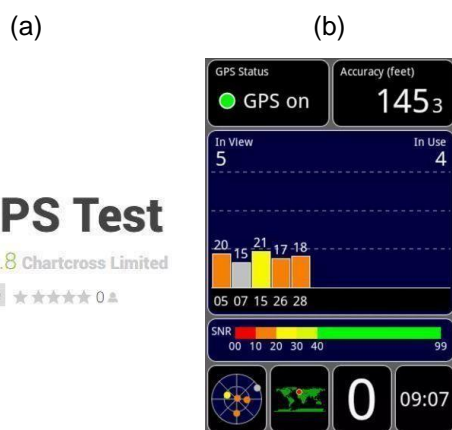
### 4.2 APLICATIVO DE CELULAR QUE PODEMOS EXPLORAR: GPS TEST

A sugestão de um aplicativo de celular para conferências de dados ou a apresentação das coordenadas de um ponto, sendo um aplicativo gratuito que pode ser baixado no celular Android o *GPS Test* que possui a interface (Figura 14-a).

GPS *Test* é um *app* abrangente com o qual se pode acessar toneladas de informações como: a localização de satélites e também as emissões de sinal do seu GPS, sua altitude em relação ao nível do mar e a posição do sol.

Após baixar e abrir o aplicativo explorarem o que cada aba serve e representa. A primeira aba une toda a informação geral relacionada ao seu GPS. Esta função permite que se veja a taxa de sinal por ruído (SNR) do GPS (Figura 14-b).

**Figura 14 – GPS Test**



**Fonte:** Disponível para baixar no link <https://gps-test.br.uptodown.com/android>

A segunda aba (Figura 15-a e 15-b) mostra a posição dos satélites na bússola, e também a intensidade dos sinais deles, para que possa sempre saber onde eles estão. Esta função ajudar a melhorar a conexão quando estiver numa localização desconhecida ou algum lugar com pouca cobertura.

Na aba seguinte, encontrar-se a posição exata no mapa usando as coordenadas atuais da sua localização, e também um ícone do sol que mostra que parte do mundo está recebendo luz do sol em qualquer momento (Figura 15-c).

A quarta aba (Figura 15-d) mostra sua altitude, velocidade e direção de movimento - uma ferramenta muito útil quando se está viajando de carro, já que mostra a movimentação do internauta no mapa.

**Figura 15 – Imagens da tela do aplicativo GPS Test**

(a) (b) (c) (d)





Fonte: Disponível para baixar no link <https://gps-test.br.uptodown.com/android>

Finalmente, *GPS Test* traz informação sobre data, tempo e hora local na sua localização, e também hora do nascer e pôr do sol.

Com isso, propõe-se utilizar este aplicativo no desenvolver de uma atividade com o aplicativo já instalado no celular dos alunos e anotar os dados: latitude, longitude e atitude e realizar os cálculos referentes a estas coordenadas para definir a sua localização em tempo real.

### 4.3 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Primeiramente serão apresentados alguns exemplos que servirão como base para as sequências didáticas que envolvem todo o conceito de matemática mostrado anteriormente para uma possível aplicação em sala de aula.

#### Exemplo 1: Processo de trilateração

Já são quase 13 horas e Maria está perdida em Franca interior de São Paulo está entre Escola Estadual Torquato Caleiro (A) e a Igreja Nossa Senhora das Graças (B) quando ouve a sirene da escola bate às 13h da tarde e também o sino da Igreja batendo no mesmo horário. Maria tinha em suas mãos um bloco de notas que anotou os segundos de onde estava localizada percebeu que 1,2 segundos ouve da escola, 1,5 segundos são ouvidos da Igreja e por fim da Escola Estadual Coronel Francisco Martins (C) em 1,0 segundos. Sabendo que o som se propaga com a velocidade de 340 m/s, qual é a posição de Maria?

## Resolução:

Primeiramente devem-se calcular as distâncias  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  em relação à EETC, a Igreja e a EECFM como a seguir:

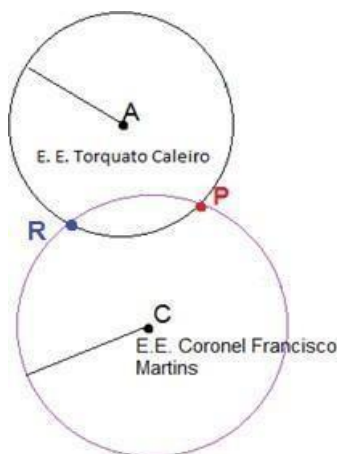
$$r_1 = 1,2 \times 340 = 408m$$

$$r_2 = 1,5 \times 340 = 510m$$

$$r_3 = 1,0 \times 340 = 340m$$

Com os raios estabelecidos podem-se traçar as duas circunferências (Figura 16) que interceptam nos pontos P e R sendo a possível localização de Maria:

**Figura 16** – Maria está no ponto P ou R

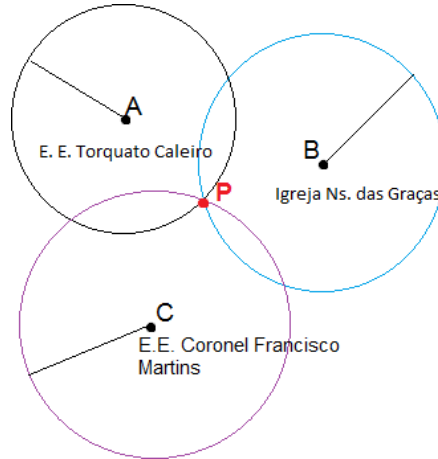


Fonte: Próprio autor.

Se Maria conhecesse a cidade de Franca ela provavelmente poderia distinguir onde se encontrava, utilizando o mapa da cidade em suas mãos e um compasso ela ao traçar duas circunferências e interceptam em dois pontos, mas isso não seria o suficiente, então ao traçar a terceira circunferência de raio  $r$  e centro em B como indicado na Figura 17.

Pode-se ter a certeza que Maria se encontra exatamente no ponto P descrito abaixo (Figura 17), este método é considerado Trilateração e é um conceito fundamental para o funcionamento do GPS.

**Figura 17** – Maria encontra-se no ponto P



Fonte: Próprio autor

**Exemplo 2:** Coordenadas Cartesianas de um ponto no espaço. Determine as coordenadas geográficas e a altitude de um ponto P dado por:  $P = (-3\sqrt{3} \times 10^6, 3 \times 10^6, 6 \times 10^6)$ . Considerando o raio da Terra  $6,4 \times 10^6$  metros.

**Solução:**

De acordo com os dados e utilizando a expressão temos que:

$$h = \sqrt{(-3\sqrt{3} \times 10^6)^2 + (3 \times 10^6)^2 + (6 \times 10^6)^2} - 6,4 \times 10^6$$

$$h = \sqrt{27 \times 10^{12} + 9 \times 10^{12} + 36 \times 10^{12}} - 6,4 \times 10^6$$

$$h = \sqrt{72 \times 10^{12}} - 6,4 \times 10^6 = 6\sqrt{2} \times 10^6 - 6,4 \times 10^6 \cong 2,1 \times 10^6 \text{ metros}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{6 \times 10^6}{6\sqrt{2} \times 10^6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\varphi = \frac{-3\sqrt{3} \times 10^6}{\sqrt{(-3\sqrt{3} \times 10^6)^2 + (3 \times 10^6)^2}} = \frac{-3\sqrt{3} \times 10^6}{\sqrt{36 \times 10^{12}}} = \frac{-3\sqrt{3} \times 10^6}{6 \times 10^6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{3 \times 10^6}{\sqrt{(-3\sqrt{3} \times 10^6)^2 + (3 \times 10^6)^2}} = \frac{3 \times 10^6}{\sqrt{36 \times 10^{12}}} = \frac{3 \times 10^6}{6 \times 10^6} = \frac{1}{2}$$

Portanto, as coordenadas geográficas de P são  $\Theta=45^\circ\text{N}$  (norte) e  $\varphi=60^\circ\text{E}$  (leste) e altitude de  $2,1 \times 10^6$  metros.

**Exemplo 3:** Atividade simulando a localização de um ponto no espaço O exemplo abaixo retrata uma situação real de um usuário de GPS é captado por exatamente quatro satélites. O quadro 1 a seguir mostra as efemérides (em metros) que cada satélite ocupa em confrontar ao nosso sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Quadro 1 – Efemérides (m) de quatro satélites

	y	x	z
Satélite 1	$1,877191188 \cdot 10^6$	$-1,064608026 \cdot 10^7$	$2,428036099 \cdot 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \cdot 10^7$	$-1,308719098 \cdot 10^7$	$2,036005484 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,459587395 \cdot 10^7$	$-4,336916128 \cdot 10^6$	$9,090267461 \cdot 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \cdot 10^6$	$7,251740720 \cdot 10^6$	$2,527733606 \cdot 10^7$

O receptor registra os lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite (Quadro 2).

Quadro 2 – Tempo registrado entre transmissão e recepção

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Considerando que os números contêm dez ou mais dígitos e ao realizar em uma sala de aula torna-se necessário a utilização de calculadora ou um software com capacidade de resolução para resolver os sistemas lineares com coeficientes desta

ordem ou utilizar um número de menores dígitos para facilitar os cálculos e utilizar a notação científica.

Calcule o raio entre o receptor e cada satélite.

- Escreva as equações gerais imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais as distâncias calculadas.
- Determine as coordenados do ponto P que pertence simultaneamente às quatro superfícies esféricas.
- Determine a latitude, longitude e altitude de P.
- Encontre em um atlas geográfico ou globo terrestre e identifique a posição do usuário do GPS.

### Resolução:

Inicialmente multiplicando-se cada lapso de cada satélite pela velocidade da luz ( $2,99792458 \cdot 10^8$  m/s) obtêm-se a distâncias entre o receptor e cada satélite. Logo se tem:

$$\text{Satélite1} \Rightarrow (0,08251731391) \times (2,99792458 \times 10^8) = 24,738 \times 10^6$$

$$\text{Satélite2} \Rightarrow (0,07718558331) \times (2,99792458 \times 10^8) = 23,139 \times 10^6$$

$$\text{Satélite3} \Rightarrow (0,06890629029) \times (2,99792458 \times 10^8) = 20,657 \times 10^6$$

$$\text{Satélite 4} \Rightarrow (0,07815826940) \times (2,99792458 \times 10^8) = 23,431 \times 10^6$$

Esses valores correspondem aos raios das superfícies esféricas centradas em cada satélite ( $r_1 = 24,738 \times 10^6$ m,  $r_2 = 23,139 \times 10^6$ m,  $r_3 = 20,657 \times 10^6$ m,  $r_4 = 23,431 \times 10^6$  m).

Agora escrevendo em equações reduzidas das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite obtêm-se:

$$S_1: (x - 1,8 \times 10^6)^2 + (y + 10,6 \times 10^6)^2 + (z - 24,2 \times 10^6)^2 = 611,9 \times 10^{12}$$

$$S_2: (x - 10,9 \times 10^6)^2 + (y + 13 \times 10^6)^2 + (z - 20,3 \times 10^6)^2 = 535,4 \times 10^{12}$$

$$S_3: (x - 24,5 \times 10^6)^2 + (y + 4,3 \times 10^6)^2 + (z - 9 \times 10^6)^2 = 426,7 \times 10^{12}$$

$$S_4: (x - 3,8 \times 10^6)^2 + (y - 7,2 \times 10^6)^2 + (z - 25,2 \times 10^6)^2 = 549 \times 10^{12}$$

Calculando os quadrados, obtêm-se as equações gerais e o sistema e ao fazer a interação de  $S_1 - S_2$  e  $S_1 - S_3$  e  $S_1 - S_4$  obtêm o sistema linear que corresponde a:

$$18,2x - 4,88y - 7,84z - 76,52 \times 10^6 = 0$$

$$45,43x + 12,61y - 30,38z - 185,23 \times 10^6 = 0$$

$$3,95x + 35,79y + 1,99z - 62,95 \times 10^6 = 0$$

Resolvendo o sistema anterior tem-se uma solução única que é dada por:

$$x = 0,5660 \cdot 10^7; y = 0,0978 \cdot 10^7; z = 0,2775 \cdot 10^7$$

Isso se refere às coordenadas do ponto P que pertence simultaneamente às quatro efemérides e suas coordenadas geográficas utilizando o raio da Terra medindo 6, 378164.  $10^6$  metros temos:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d(O, P) = \sqrt{(0,5660)^2 + (0,0978)^2 + (0,2775)^2}$$

$$d(O, P) = 0,6379 \times 10^7 \text{ m}$$

$$h = OP - r$$

$$h = (0,6379 - 0,6378) \times 10^7 = 1083,71 \text{ m}$$

A longitude (arco  $\varphi$ ) tem:

$$\varphi = \cos^{-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \cos^{-1} = \frac{0,5660}{\sqrt{0,5660^2 + 0,0978^2}} = 9,803^\circ \text{E}$$

A latitude (arco  $\Theta$ ) temos:

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{z}{OP} = \frac{0,2775}{0,6379} = 25,7886^\circ\text{N}$$

Latitude:  $\theta = 26^\circ\text{N}$  - Longitude:  $\varphi = 10^\circ\text{E}$  - Altitude: 1083,71 metros

Ao consultar o atlas geográfico ou o globo terrestre conseguiu-se identificar a posição do usuário do GPS em Djanet, localizada em Montes Tássili, na fronteira entre Argélia e Líbia.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a sua importância de saber a sua localização no espaço com a navegação do GPS antes era restrito somente para o uso militar, hoje pode-se ver que é extremamente útil em diversas outras situações tais como: para o monitoramento de abalos sísmicos, estudos de meteorologia, localização de resgates de difícil acesso, para o georreferenciamento de grandes plantações, o uso para a segurança em monitoramento de veículos e inúmeros outros casos.

Vale salientar que também existe possibilidade de erro na precisão da localidade por meio do GPS, mas há suportes para corrigir tais erros.

O funcionamento de um aparelho de GPS é interessante de ser estudado, embora complexo, mas o que realmente é importante para este trabalho é o cálculo feito pelo receptor utilizando conceitos de geometria analítica, a fim de calcular a posição em que se está localizado. Saber se deslocar num determinado espaço, mesmo que ele ainda lhe seja desconhecido, nos permite conhecer novos mundos, novos campos de conhecimentos, de conquistas, de descobertas.

Tendo em vista que este trabalho pode ser construído em conjunto com outras matérias do ensino médio, gerando um projeto multidisciplinar. A geometria analítica, além de útil aos profissionais da matemática, da física, da engenharia, agronomia, geógrafos e inúmeros outros, ela favorece aqueles que utilizam a matemática ou outras ciências inconscientemente, porém essenciais ao funcionamento do mundo.



## REFERÊNCIAS

ALVES, Sérgio. *A matemática do GPS*. Revista do Professor de Matemática SBM. v. 59, 2006. p.17-26.

ALVES, Sérgio. *A geometria do Globo Terrestre*, Programa de iniciação Científica – OBMEP, 2009.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações*. Tradução Claus Ivo Doening .8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

CALLIOLI, C. A., COSTA, R. C. F. e DOMINGUES, H. H. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual, 1990.

CARVALHO, Edilson Alves; ARAUJO, Paulo Cesar. *Leituras cartográficas e interpretações estatísticas II – Aula 8 – Noções básicas de sistema de posicionamento global GPS*. Natal, RN: EDUFRN, 2009.

CRATO, Nuno. *A matemática das coisas: do papel A4 aos Cordões de Sapatos do GPS às Rodas Dentadas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRANCO, Neide. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

INCRA, MANUAL TÉCNICO DE POSICIONAMENTO – Georreferenciamento de imóveis rurais, Brasília, 1ª ed., p.16, 2013. Edição Especial

LAY, David J. *Álgebra Linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro, LTC- Livros Técnicos e Científicos, 2007.

LIMA, Davi D. (IME/SP); *Desvendando a Matemática do GPS*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão. 2013.

PAZ, Sergio M. CUGNASCA, Carlos E. *Sistema de Posicionamento Global (GPS) e suas aplicações*. Disponível em [http://files.profricardoferreira.webnode.com/200000014-236b224656/1.O%20Sistema%20de%20Posicionamento%20Global%20\(GPS\)%20e%20suas%20aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf](http://files.profricardoferreira.webnode.com/200000014-236b224656/1.O%20Sistema%20de%20Posicionamento%20Global%20(GPS)%20e%20suas%20aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf) Acesso 10 de abril de 2019.

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL MINISTÉRIO DO DESENVOLVIMENTO AGRÁRIO INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA Diretoria de Ordenamento da Estrutura Fundiária Coordenação Geral de Cartografia, 1ª edição, 2013.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2007.