

EVIDÊNCIAS DA MULTIFRACTALIDADE EM SISTEMAS CAÓTICOS USANDO O MÉTODO MFDFA

Daiane Rodrigues Costa
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
daiane_costta@outlok.com

Antônio Carlos da Silva Filho
Doutor em Ciência e Docente do Uni-FACEF
acdassf@bol.com.br

RESUMO

Os sistemas caóticos apresentam atratores reconhecidos como objetos fractais. Neste trabalho, exploramos os sistemas de Lorenz, Rössler, Hénon, Ikeda e Logístico e mostramos, usando o método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) que eles são muito mais do que isto: são sistemas multifractal. Os Sistemas foram gerados a partir da solução das equações ou sistemas de equações (diferenciais ou de diferenças) que os caracterizam, produzindo séries temporais para as suas variáveis e comparando os resultados com séries padrões da literatura: série de ruído branco, série monofractal e série multifractal.

Palavras-chave: Sistema de Lorenz. Sistema de Rössler. Sistema de Hénon. Sistema de Ikeda. Sistema Logístico. Fractais. Multifractais. MFDFA.

ABSTRACT

Chaotic systems present attractors known as fractal objects. In this work, it is explored the Lorenz, Rössler, Hénon, Ikeda and Logistic systems, furthermore, it is shown, by applying the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis method (MFDFA) that they are more than that: they are multifractal systems, which are generated from the results obtained from systems of differential equations, that characterize them, producing temporal series for its variables and comparing the results with standard series of the literature: white noise, monofractal and multifractal series.

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos sobre multifractais foram realizados pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot. O termo “Fractal”, cunhado por ele, vem do adjetivo latim *fractus*, do verbo *frangere*, e significa quebrar. A ideia básica sobre fractais é que objetos e fenômenos complexos podem ser reduzidos, eventualmente, a unidades menores que, em si, reproduzem o objeto como um todo [MANDELBROT, 1998].

As primeiras observações sobre fractais vieram da geometria: a ideia básica era a de escalar os objetos em unidades menores, sendo o objeto como um todo passível de ser obtido como um “esticamento” (ou “escalamento”) do menor. O ponto que nos interessa aqui é que este escalamento, nos fractais, é feito com o mesmo valor em todas as direções, ou seja: há apenas um fator de escala que permite ir do menor ao maior (ou vice-versa).

Estes objetos têm sido encontrados em várias áreas, como na física experimental, química, matemática, geofísica, fisiologia, incluindo economia e ciências sociais aplicadas. Acontece que o mais frequente, na natureza são sistemas complexos, fora do equilíbrio, para os quais não é possível modelar e explicar seu comportamento por meio de uma única escala exponencial: diferentes direções se transformam com diferentes expoentes. Assim, ao caracterizar estes sistemas, precisamos não de um, mas de um conjunto de expoentes de escala, caracterizando os assim chamados multifractais.

O comportamento multifractal foi primeiramente descrito por Mandelbrot no livro “*Les Objets Fractal: forme, hasard et dimension*” e, mais tarde, confirmado por Mantegna e Stanley [MANTEGNA & STANLEY, 1996]. Nos últimos anos, vários autores têm estudado uma gama ampla de fenômenos e sistemas que exibem este comportamento multifractal. Eles aparecem, no mais das vezes, nas séries temporais vindas da experiência, da observação ou de simulações computacionais. Exemplos

Neste trabalho usamos uma das principais ferramentas para se analisar as séries temporais multifractais, o MFDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis), para verificar se o Sistema de Lorenz – um dos fractais mais conhecidos popularmente – é na verdade um monofractal (com um só parâmetro de escala) ou um multifractal (com vários parâmetros de escala).

2 MÉTODOS DE PESQUISA

Mandelbrot iniciou os estudos sobre multifractais em 1975 [MANDELBROT, 1998]. Ele mostra, neste livro, que muitas séries encontradas na natureza não podem ser explicadas por uma única escala exponencial e chega à conclusão de que há evidência de multifractalidade em muitos casos (como numa couve-flor). Nos últimos anos vários modelos se desenvolveram com o objetivo de analisar as propriedades multifractais das séries temporais. Dentre os mais utilizados estão: (1) o método de Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA), que é a generalização do método DFA, desenvolvido por Kantelhardt et al. [KANTELHARDT et al., 2002] e (2) o método Wavelet Transform Modulus Maxima Method (WTMM), que é uma extensão do modelo descrito por Holschneider [HOLSCHNEIDER, 1998].

Usaremos, neste trabalho, O MFDFA. Ele é, atualmente, o método mais utilizado na área de simulações computacionais, em Econofísica e na análise de séries fisiológicas em medicina. Nos parágrafos seguintes faremos uma descrição do método MFDFA. O que se segue, então, é praticamente o roteiro descrito originalmente por Kantelhardt [KANTELHARDT et al., 2002] e utilizado em centenas de trabalhos na literatura.

O algoritmo consta de seis etapas. Seja x_k uma série temporal de comprimento N e com suporte compacto, ou seja, $x_k = 0$ somente para uma fração insignificante de valores.

Etapa 1: Determina-se o “perfil” Y :

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Etapa 2: Divide-se o perfil $Y(i)$ em $N_s \equiv \int(N/s)$ segmentos de comprimento s não superpostos. Como o comprimento N das series normalmente não é um múltiplo da escala s considerada, sobrar, quase sempre, uma pequena porção ao final. A fim de não desconsiderar esta pequena porção da série, repete-se o mesmo procedimento, mas começando do final para o início da série (na ordem inversa, portanto). Assim, são obtidos $2N_s$ segmentos no total.

Etapa 3: Calcula-se a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por uma regressão, usando o método dos mínimos quadrados. Após isso, determina-se a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s+i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

Para cada segmento $v, v = 1, \dots, N_s$ and

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v-N)s+i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

Para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$. Aqui, $y_v(i)$ é o polinômio ajustado para o segment v .

Etapa 4: Faz-se a média sobre todos os segmentos a fim de obter a função de flutuação de q -ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (4)$$

Aqui, a variável “q” pode ter qualquer valor, exceto zero. Os passos 2 a 4 ser repetidos para diferentes escalas de tempo s.

Etapa 5: Determina-se o comportamento de escala da função de flutuação através da análise de gráficos log-log de $F_q(s)$ contra s, para cada valor de q (já que fenômenos com invariância de escala obedecem a uma lei de potência [MANDELBROT, 1998]).

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \tag{5}$$

A função $h(q)$ é conhecida como Expoente de Hurst Generalizado.

Etapa 6: Eq. (5) pode ser escrita como $F_q(s) = AS^{h(q)}$, a partir da qual, tirando-se logaritmos dos dois lados, chega-se

$$\log F_q(s) = \log A + h(q) \log s \tag{6}$$

Podendo-se obter, assim, o valor do Expoente de Hurst Generalizado.

Séries temporais monofractais são caracterizadas por um único expoente de escala. Assim, espera-se que o Expoente de Hurst Generalizado, $h(q)$, seja independente de q. Esta diferença é a base da distinção entre os dois tipos de comportamento neste método: $h(q)$ não varia com q para as series monofractais, mas varia com q para as series multifractais. A origem deste fato está em que os diferentes fatores de escala para pequenas e grandes flutuações produzirão dependência significativa de $h(q)$ em função de q. Estas diferenças são diferentes para diferentes valores de q: q's positivos e q's negativos. Para valores de q positivos, $h(q)$ descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações, enquanto que para valores de q negativos, os expoentes de escala $h(q)$ descrevem o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

Assim, a maneira mais aceita pela comunidade científica de confirmar a multifractalidade nas series temporais é através da análise do seu espectro, onde por espectro deve-se entender o conjunto dos valores para $h(q)$ ou para $\alpha(a)$, onde $\alpha(q)$ é

obtido a partir de $h(q)$ por uma transformação . Esta análise é baseada na seguinte relação entre o Expoente de Hurst Generalizado , $h(q)$, e o Expoente de Renyi, $\tau(q)$ [GREEN et al., 2014]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 - q(h(1) - 1) \quad (7)$$

A partir da equação (7) deduz-se, fazendo-se uma transformação de Legendre:

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = \alpha(q) q - \tau(q) \quad (8)$$

Usando a Equação 6, define-se o grau de multifractalidade pode ser definido como:

$$\Delta h = \max[h(q)] - \min[h(q)] \quad (9)$$

Já usando a Equação 8, chega-se a uma medida alternativa (embora equivalente) do grau de multifractalidade

$$\Delta \alpha = \max[\alpha] - \min[\alpha] \quad (10)$$

Na seção seguinte faremos uma análise, com o auxílio das formulas e expressões de 1 a 10 acima, da presença ou não de multifractalidade no Sistema de Lorenz quando no regime caótico.

3 DADOS E RESULTADOS

Foram utilizadas 3 séries temporais, com 8.000 valores em cada uma, como padrão para se fazer as comparações: uma série de Ruído Branco (Whitenoise); Uma série Monofractal; Uma série Multifractal

O ruído branco é um sinal aleatório, com a mesma intensidade nas diferentes frequências. Tecnicamente, é uma sequência de variáveis aleatórias não autocorrelacionadas, com media zero e variância infinita. As series monofractais e multifractais obedecem às condições já expostas neste artigo.

Elas foram obtidas a partir de um artigo sobre o método MFDFA [IHLEN, 2012]. Os gráficos das suas series temporais estão exibidos nas figuras 1, 2 e 3 a seguir:

Figura 1 – Série temporal do Ruído Branco

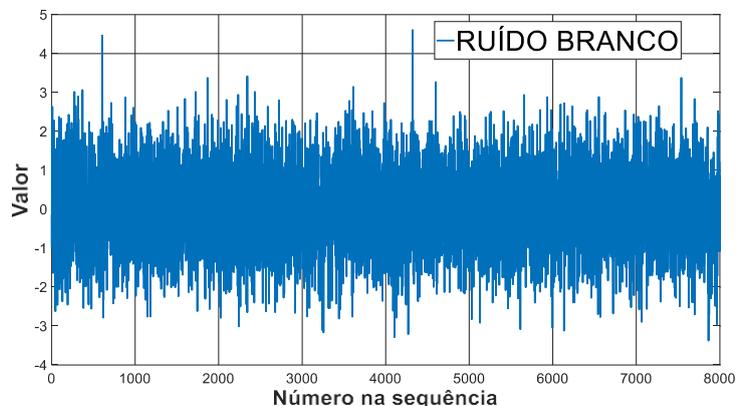


Figura 2 – Série temporal Monofractal.

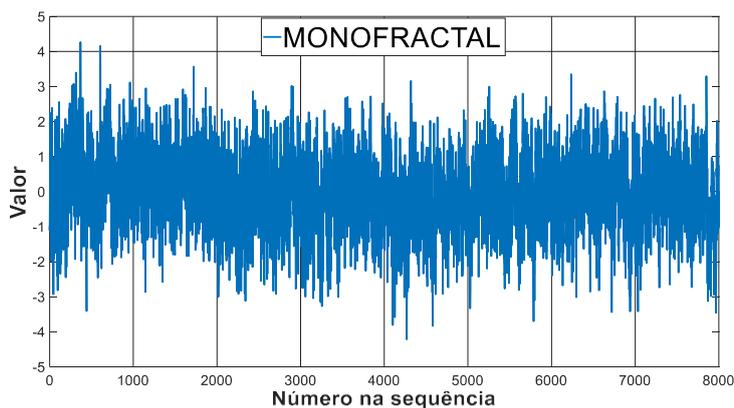
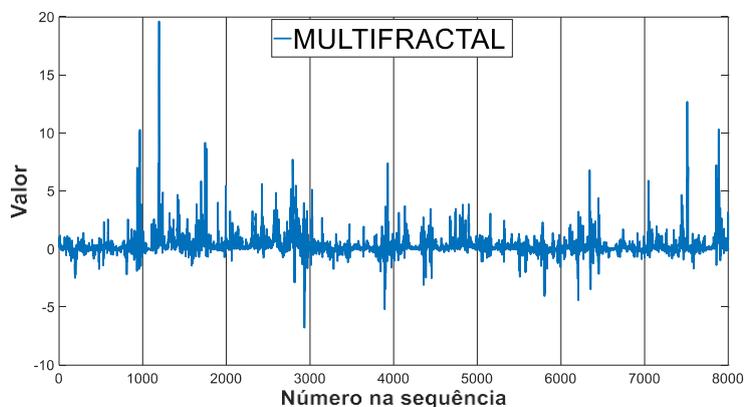


Figura 3 – Série temporal Multifractal.



Vamos considerar com mais detalhes, como exemplo, o Sistema de Lorenz.

O Modelo (ou Sistema) de Lorenz é constituído por três equações diferenciais não lineares que conectam três funções (x , y e z) e é matematicamente expresso como (GULICK, 1992):

$$dx/dt = \sigma y - \sigma x$$

$$dy/dt = rx - y - xz$$

$$dz/dt = xy - bz$$

A variável t refere-se ao tempo e, ao contrário do que se pensa, as variáveis x , y , z não se referem às coordenadas no espaço. Na verdade, x representa a amplitude das correntes de convecção, y é a diferença de temperatura entre as correntes de ar ascendentes e descendentes e z representa a distorção da temperatura normal no plano. As constantes são dadas por:

$\sigma = \nu/\kappa$, chamado Número de Prantdtl;

$r = R_a/R_c$, chamado número de Rayleigh;

$b = \frac{4}{1+a^2}$, uma constante relacionada com o espaço dado.

Este modelo exibe comportamento caótico, caso as constantes sejam colocadas como: $\sigma = 10$; $r = 28$; $b = 8/3$. O sistema foi resolvido numericamente e foram gerados, também, 8.000 valores para cada uma das três funções (x, y e z). A séries destes valores estão nas figuras 4, 5 e 6:

Figura 4 – Série temporal da componente “x” do Sistema de Lorenz.

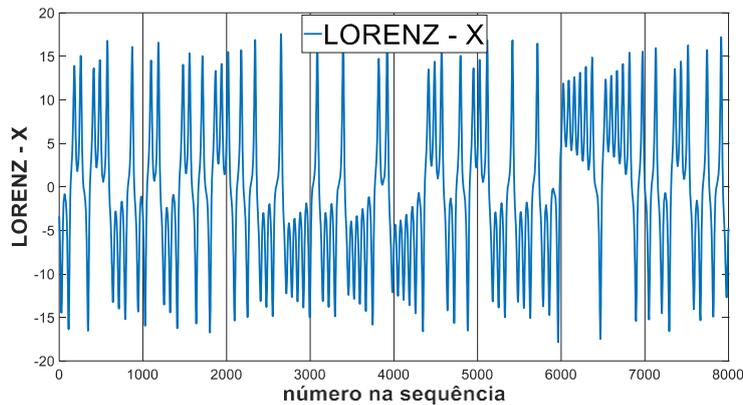


Figura 5 – Série temporal da componente “y” do Sistema de Lorenz.

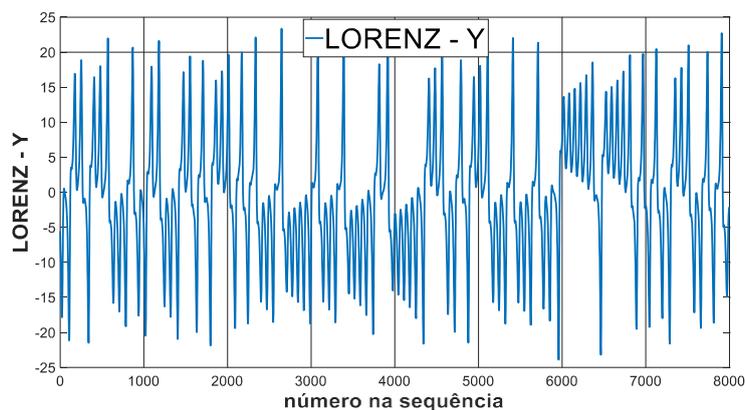
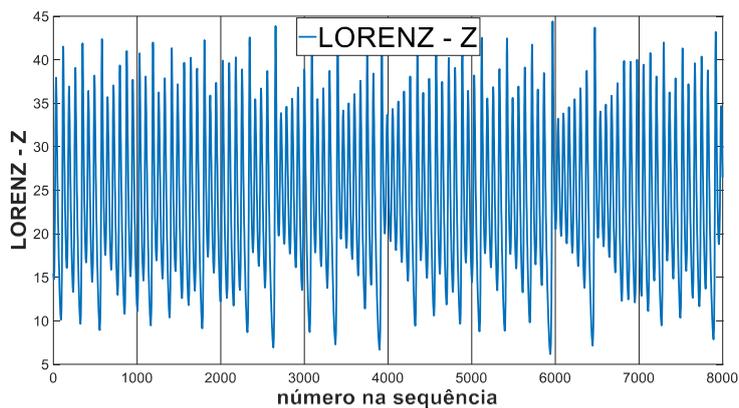


Figura 6 – Série temporal da componente “z” do Sistema de Lorenz.



As projeções destas variáveis nos eixos nos fornecem as representações usuais conhecidas até na literatura popular do Sistema de Lorenz com comportamento caótico:

Figura 8 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano x-y.

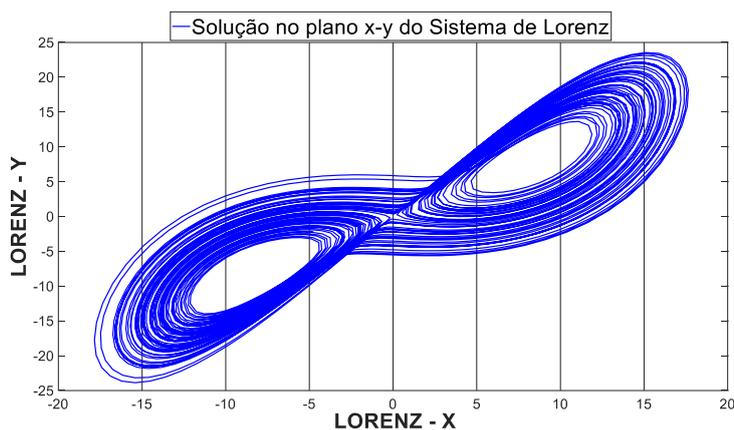


Figura 7 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano x-z.

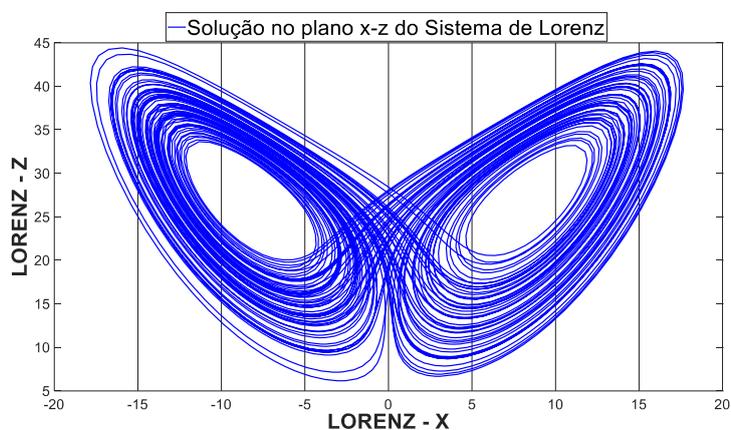
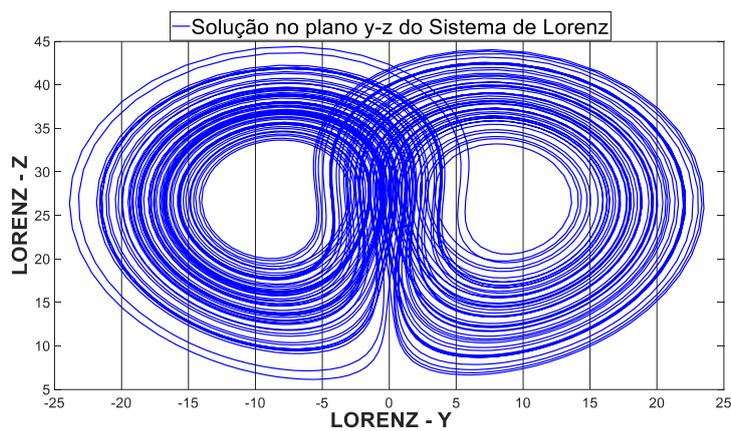
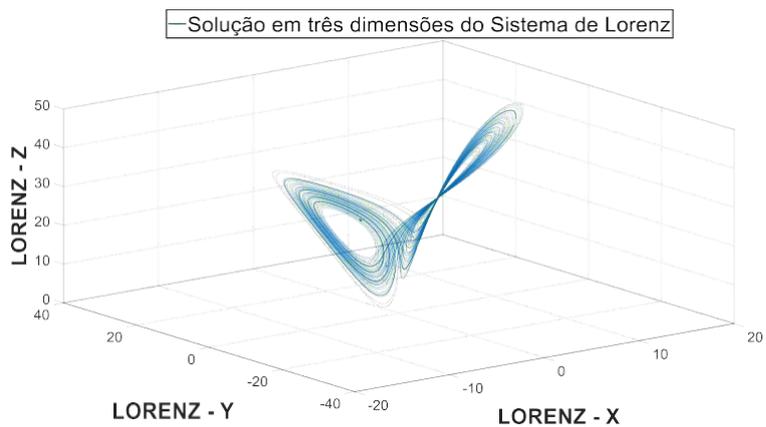


Figura 9 – Projeção do Sistema de Lorenz no plano y-z.



Já a projeção nos três eixos, produz o assim chamado atrator de Lorenz:

Figura 10 – O Atrator de Lorenz.



As equações de 1 a 10 foram resolvidas para estas séries, e os resultados estão nas figuras a seguir. A figura 11 mostra $f(\alpha)$ em função de α . Podemos ver que as curvas para as componentes do Sistema de Lorenz situam-se entre as curvas monofractal e multifractal. Isto fica melhor evidenciado na figura 14.

Nas figuras 12 e 13, colocamos os dois padrões, a série monofractal e a série multifractal, além da série do Ruído Branco. Fica evidente que a série monofractal difere apenas ligeiramente da série do Ruído Branco e, assim, usaremos nas figuras 13 e 14 apenas as curvas para as séries monofractal e multifractal. Nas figuras 12 e 13 podemos identificar uma variação muito maior para a série multifractal e, então, usaremos esta configuração como um padrão de comparação entre as séries geradas pelo Sistema de Lorenz e as mono e multifractais.

Figura 11 – Gráfico de $f(\alpha)$ em função de α .

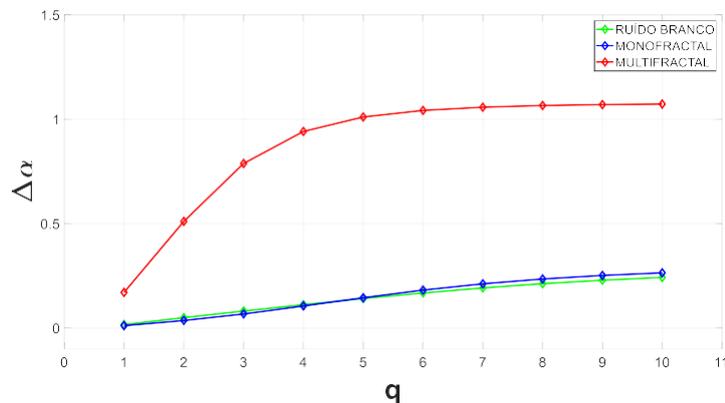


Figura 12 – Grau de Multifractalidade $\Delta\alpha$ para as séries de referência, em função do momento.

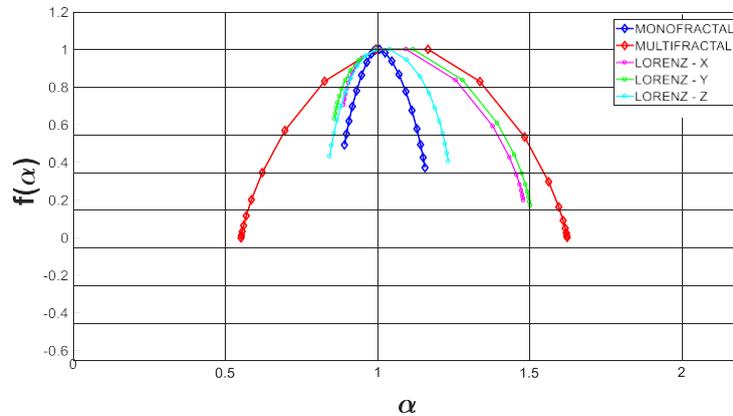
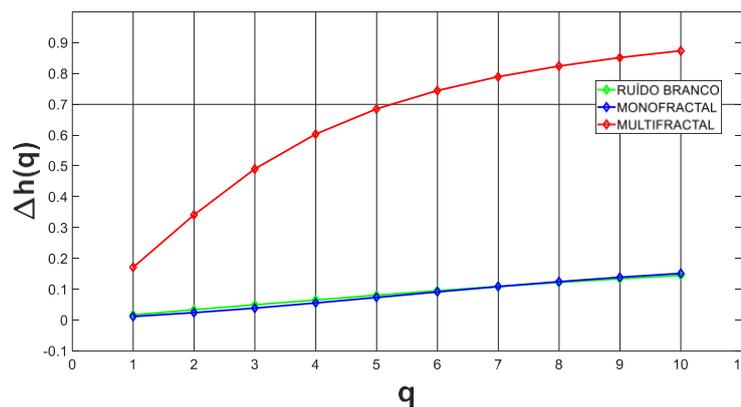


Figura 13 – Grau de Multifractalidade Δh para as séries de referência, em função do momento.



A figura 15 permite verificar que as curvas obtidas a partir das três componentes do Sistema de Lorenz situam-se entre as curvas monofractal e multifractal. Isto é uma evidência do comportamento multifractal destas componentes, pois os deltas assumem valores maiores do que os assumidos pela série monofractal. Não obstante, se formos associar uma medida do grau de multifractalidade a estes deltas, temos o resultado de que o Sistema de Lorenz é multifractal, mas apenas ligeiramente multifractal, não fortemente.

Figura 14 – Grau de Multifractalidade $\Delta\alpha$ para o Sistema de Lorenz, em função do momento.

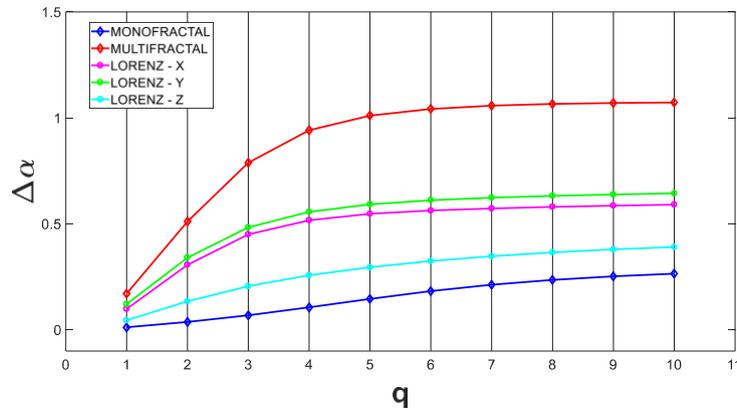
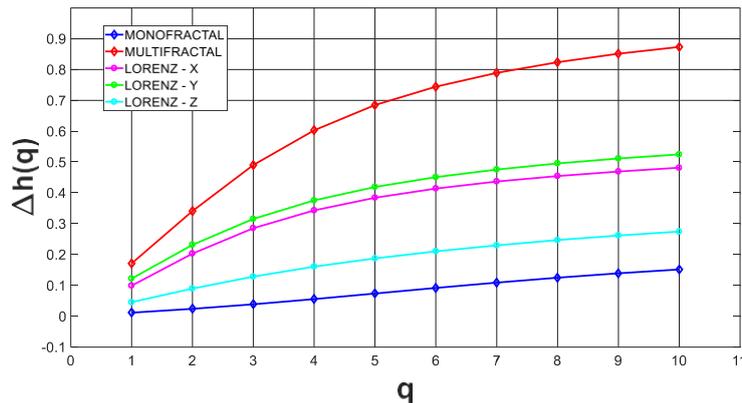


Figura 15 – Grau de Multifractalidade Δh para o Sistema de Lorenz, em função do momento.



Agora examinaremos outros sistemas, além do Sistema de Lorenz: (1) um outro sistema contínuo, o Sistema de Rossler; (2) alguns sistemas discretos: o Sistema de Hénon (bidimensional), o Sistema de Ikeda (bidimensional) e o Sistema Logístico (unidimensional). Os casos (1) e (2) têm por equações as seguintes [SPROTT, 2003]:

O Atrator de Rössler:

$$dx/dt = -y - z$$

$$dy/dt = x + ay$$

$$dz/dt = b + z(x - c)$$

onde, usualmente: $a = b = 0,2$; $c = 5,7$

O sistema de Ikeda:

$$X_{n+1} = \gamma + \mu(X_n \cos\varphi - Y_n \sin\varphi)$$

$$Y_{n+1} = \mu(X_n \sin\varphi + Y_n \cos\varphi)$$

$$\Phi = \beta - \alpha/(1 + X_n^2 + Y_n^2)$$

onde, usualmente: $\alpha = 6$; $\beta = 0,4$; $\gamma = 1$; $\mu = 0,9$

O Mapa de Hénon:

$$X_{n+1} = 1 - a(X_n)^2 + bY_n$$

$$Y_{n+1} = X_n$$

onde, usualmente: $a = 1,4$; $b = 0,3$

O Mapa Logístico:

$$X_0 = 0.54321$$

$$X_n = 4 * X_{n-1} * (1 - X_{n-1})$$

Alguns dos primeiros resultados podem ser vistos nas Fig. 16 e 17 a seguir, onde todas as séries contêm, também, 8.000 valores cada uma. Na Fig. 16 colocamos os dois sistemas contínuos – Lorenz e Rossler – juntos. Na Fig. 17, colocamos os três sistemas discretos – Hénon, Ikeda e Logístico – também juntos, para efeito de comparação.

Figura 16 – Grau de Multifractalidade $\Delta\alpha$ para o Sistema de Lorenz e o Sistema de Rössler, em função do momento.

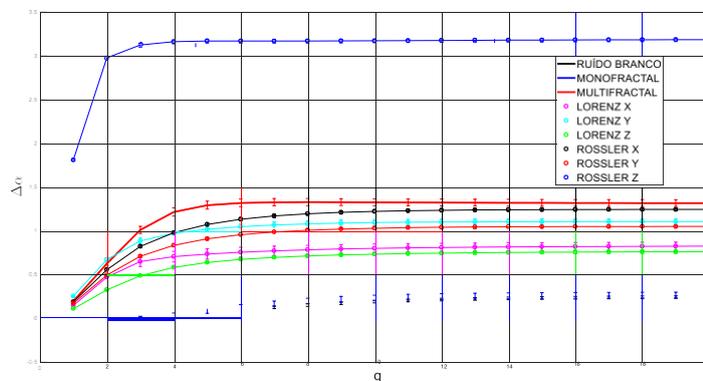
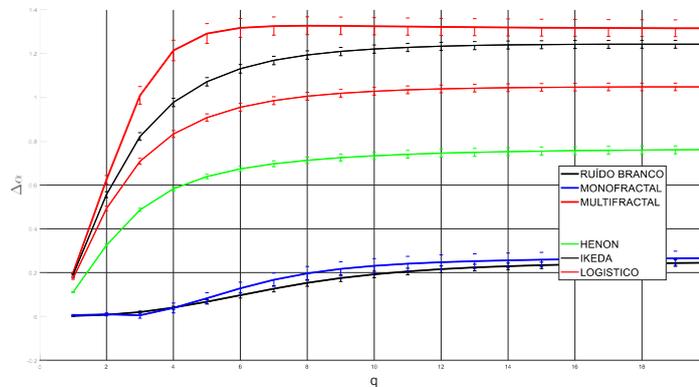


Figura 17 – Grau de Multifractalidade $\Delta\alpha$ para os Sistema de Hénon, Ikeda e Logístico, em função do momento.



Em todos estes exemplos, pode-se ver que há um razoável grau de multifractalidade para todas estas componentes das series (as linhas se afastam das linhas de Ruído Branco e Monofractal e se aproximam da linha vermelha multifractal). A componente z do Sistema de Lorenz é a que revela, nestas condições, o maior grau de multifractalidade. No trabalho completo, serão apresentadas tabelas com os valores obtidos.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho procurou examinar a multifractalidade dos conhecidos sistemas caóticos de Lorenz, Rössler, Hénon, Ikeda e Logístico. Através dos parâmetros Δh e $\Delta\alpha$ e usando-se series já reconhecidas como tais na literatura como padrão, pudemos mostrar que as componentes destes sistemas no regime caótico apresentam um comportamento multifractal.

REFERÊNCIAS

GREEN, E.; HANAN, W.; HEFFERNAN, D. *The origins of multifractality in financial time series and the effect of extreme events*. The European Physical Journal B, v. 87, n. 6, 2014.

GULICK, Denny. *Encounters with Chaos*. New York: Mc Graw, 308 p., 1992.

HOLSCHNEIDER M. *On the wavelet transformation of fractals objects*. Journal of Statistical Physics, v. 50, p. 963-993, mar. 1988.

IHLEN, E. A. F. *Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MatLab*. Frontiers in Physiology, v. 3, p. 1-18, jun. 2012.

KANTELHARD J. W et al. *Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series*. Physica A, v. 316, p. 1-18, 2002.

MANDELBROT, Benoît. *Objetos Fractais*. Lisboa, Gradiva, 1998. 190 p.

MANTEGNA, Rosario Nunzio; STANLEY, Harry Eugene. *Turbulence and financial markets*. Nature, v. 383, p. 587-588, out. 1996.

SPROTT, J. C. *Chaos and Time-Series Analysis*. New York: Oxford, 2003. 506 p.

RELMAT

Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática

Uni-FACEF

Centro Universitário Municipal de Franca