

ESTUDO DO MELHOR GRAU DE REGRESSÃO PARA EVIDENCIAR MULTIFRACTALIDADE EM SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS UTILIZANDO O MÉTODO MFDFA

João Pedro Fernandes
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF
jpf.jpf@msn.com

Antônio Carlos da Silva Filho
Doutor em Ciência e Docente do Uni-FACEF
acdassf@bol.com.br

RESUMO

Uma das análises para entender o comportamento de séries temporais financeiras utilizada na literatura é a caracterização dos dados e do complexo gerador dessa série por expoentes de escala fractal e multifractal. Existem muitos modelos empregados para observar as características multifractais de séries temporais e o mais aplicado para este fim, principalmente para séries financeiras, é o modelo MFDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis). Com o uso deste modelo, vários autores já identificaram o comportamento de escala multifractal em inúmeras séries financeiras de diversos tipos como: taxa de câmbio, ações, preço do ouro e também para diversos índices oriundos de países tanto desenvolvidos como em desenvolvimento. Mesmo sendo um modelo consagrado e muito utilizado para tal fim, ainda existem algumas questões que devem ser discutidas para padronizar as análises que vêm sendo feitas na literatura. Com este intuito, este trabalho analisa qual (ou quais) é (são) o(s) melhor(es) grau(s) dos polinômios de regressão utilizados em uma dada etapa do método MFDFA para distinguir a multifractalidade da não multifractalidade em séries temporais financeiras. Os dados diários são usados para quatro das ações mais negociadas no mercado de ações brasileiro, seis índices internacionais de ações diferentes, o principal índice brasileiro, quatro taxas de câmbio e a moeda virtual Bitcoin, cotada a cada doze horas. As séries financeiras utilizadas são todas séries diárias, ou seja, de baixa frequência. Os resultados indicam que não há nenhuma vantagem na utilização de polinômios de graus maiores do que um, levando à sugestão de que o caso linear deva continuar a ser utilizado como padrão.

Palavras Chaves: Multifractalidade. Séries Temporais. Regressão.

ABSTRACT

One of the analyzes used in the literature to understand the behavior of financial time series is the characterization of the data and the complex generator of this series by fractal and multifractal scale exponents. There are many models used to observe the multifractal characteristics of time series and the most applied for this purpose, mainly for financial time series, is the MFDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis) model. Using this model, several authors have already identified multifractal scale behavior in numerous financial series of various types such as: exchange rate, stocks, gold price and also for various indices from both developed and developing countries. Even though it is a well-known model and widely used for this purpose, there are still some issues that should be discussed to standardize the analyzes that have been done in the literature. To this end, this paper analyzes which one (s) are the best degree (s) of regression polynomials used in a given step of the MFDFA method to distinguish multifractality from non-multifractality in financial time series. Daily data are used for four of the most traded stocks in the Brazilian stock market, 6 different international stock indices, the main Brazilian index, four exchange rates and Bitcoin virtual currency quoted every twelve hours. The financial series used are all daily series, which means low frequency. The results indicate that there is no advantage in using polynomials of degrees greater than one, leading to the suggestion that the linear case should continue to be used as standard.

Keywords: Multifractality. Time Series. Regression.

1 INTRODUÇÃO

Quando se tem uma base de dados gerada por um sistema complexo, na maioria das vezes, encontramos dados em situações de desequilíbrio, que seguem relações de escala em várias ordens de grandeza. Essas relações de escala permitem uma caracterização dos dados e do complexo gerador dessa série por expoentes de escala fractal ou multifractal, que podem servir como características para comparações com outros sistemas e modelos.

Embora as causas subjacentes da escala possam não ser conhecidas em detalhes, a caracterização fractal ou multifractal pode ser utilizada para gerar dados para teste, modelando a série de tempo e derivando previsões sobre eventos extremos ou comportamento futuro.

A aplicação principal, entretanto, é ainda a caracterização de diferentes estados ou fases do sistema complexo com base no comportamento de escala

observado. A fim de observar tal comportamento da série de tempo, várias ferramentas foram desenvolvidas. E o método mais utilizado na literatura é o método MFDFA.

E assim, vários estudos já relataram que as séries temporais financeiras, possuem características multifractais (MANDELBROT, 1997), como exemplo pode-se citar: para o mercado de ações (MANTEGNA & STANLEY, 1996; CZARNECKI & GRECH, 2010; MAGANINI, 2018; BENBACHIR et al., 2011; CAJUEIRO et al., 2009; DUTTA, 2010; NOROUZZADEH & JAFARI, 2005; SU et al., 2009; ZUNINO et al., 2009), para a taxa de câmbio (WANG et al, 2011; LUX et al., 2014; STOSIC et al., 2012; VANDEWALLE & AUSLOOS, 1998), para o preço do ouro (DUTTA et al., 2016), para o preço de commodities (MATIA et al., 2003), para moedas virtuais (DA SILVA FILHO, 2018, para preços futuros de créditos de carbono (CAO & XU, 2016).

Mesmo com várias pesquisas relatando a presença da multifractalidade em séries temporais financeiras, ainda existem questões que devem ser melhor analisadas e discutidas. Uma dessas questões é a definição do melhor grau do polinômio de regressão utilizado no método MFDFA para distinguir a multifractalidade da não multifractalidade em séries temporais. Desta forma este estudo tem como objetivo calcular os principais parâmetros multifractais do método MFDFA com vários graus de regressão, para identificar quais graus são os mais adequados para ver se uma série multifractal se distingue de uma série não multifractal. Para isso este trabalho apresenta no próximo tópico um breve histórico sobre a multifractalidade de séries temporais financeiras. Após este tópico descreveremos o método MFDFA e a sua implementação computacional no *software* MatLab.

2 UMA BREVE INTRODUÇÃO SOBRE A GEOMETRIA FRACTALE MULTIFRACTAL

Durante muito tempo em relação a geometria, utilizamos os conceitos de geometria euclidiana que Euclides organizou no livro “Os Elementos”, reunindo treze obras que fundamentam até hoje definições e axiomas ligados a geometria plana e espacial que utilizamos. Geralmente essa geometria consegue representar

objetos matemáticos e modelar elementos da natureza com facilidade, mas com o passar dos anos foi notado que a geometria euclidiana não estava conseguindo representar e modelar com a mesma precisão dos objetos criados pelo homem, os elementos com formas complexas da natureza. Os matemáticos então tinham dificuldade de calcular por exemplo as dimensões de montanhas, nuvens, continentes, vales, furacões, sistemas biológicos e várias outras formas presentes na natureza que não podiam ser representadas apenas por pontos, retas, planos ou figuras geométricas, ou seja, pela geometria euclidiana.

Alguns matemáticos do final do século XIX e início do século XX criaram curvas e objetos, que foram classificados pela sociedade e academia como “monstros” matemáticos, pois não possuíam explicações objetivas e desafiavam os conceitos matemáticos. A não representação desses objetos com o uso da geometria euclidiana e as representações simples de objetos, como nuvens, continentes e sistemas biológicos, geraram insatisfação e inquietações aos matemáticos do final do século XX.

Até que então o matemático francês Benoit Mandelbrot associa esses objetos ao termo de objetos fractais desenvolvendo então a geometria fractal, tendo como sua obra mais conhecida o livro intitulado “*The fractal geometry of nature*” (MANDELBROT, 1977). Mandelbrot então foi o criador do termo fractal, não dos fractais, porque como vimos eles já estavam presentes na natureza, na tecnologia e até na arte.

2.1 FRACTAL

Fractal adjetivo fractus, do verbo frangere em Latim, significa partir em segmentos irregulares, mas como veremos esses segmentos partidos seguem um padrão. Muito conhecido por sua autosimilaridade os fractais possuem fragmentos. que se ampliados representam o todo, em outras palavras se pegarmos uma objeto fractal e o ampliarmos, veremos na parte ampliada algo semelhante á figura toda, podendo também ser chamado de auto semelhante. Associado à uma ciência chamada Caos, os Fractais buscam justamente encontrar padrões dentro de sistemas aparentemente aleatórios, irregulares, podemos dizer caóticos (BARBOSA, 2005). Segundo Mandelbrot em 1986 em sua definição mais maleável “Um Fractal

é uma forma constituída de partes similares ao todo”.

Os Fractais foram ficando conhecidos por ter sua aparência estética bastante atrativa e desafiadora, em que após as pessoas terem conhecimento sobre o que é a geometria Fractal, nunca mais teria o mesmo olhar para os objetos, natureza e até a arte. Pois ao observarem tapetes, estampas, folhas de samambaias, folhas de árvores, as ramificações de veias no corpo, desenhos, pinturas e outros mais incontáveis objetos, tentariam sempre ali no meio do “Caos” encontrar um padrão.

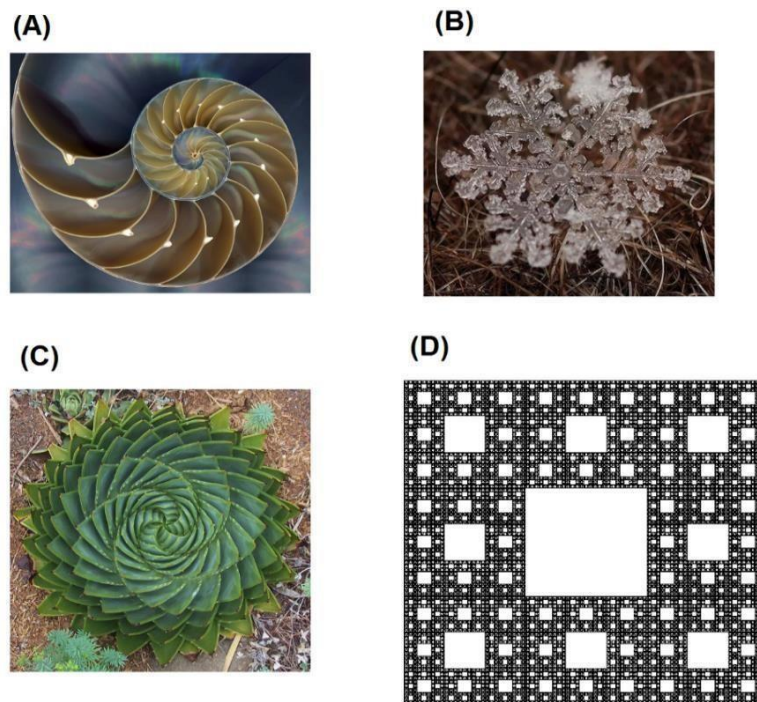


Figura 1: Exemplos de Fractais: (A) Náutilo, (B) Floco de neve, (C) Babosa, e (D) Tapete de Sierpinski.

Fonte: Imagens Google.

A evolução da tecnologia que possuímos hoje e a qualidade gráfica dos efeitos especiais dos filmes é devido aos fractais que revolucionaram a geração e a reprodução de imagens. Montanhas, rios, florestas, vulcões e ambientes fictícios de outros planetas seguem em sua construção um algoritmo que utiliza a interação fractal.

Sempre que estudado os Fractais, encontramos propriedades que são

essenciais para sua existência, sendo elas a autossimilaridade e a autoafinidade, que definem sua principal característica. Uma definição para autossimilaridade é dada por:

Definição 1 (Autossimilaridade): Um conjunto de pontos S é dito autossimilar com respeito ao raio de escala p se S for a união de N subconjuntos não sobrepostos S_1, \dots, S_N , em que cada um é obtido de S a partir da transformação $S_i = pS$ com $i = 1, \dots, N$.

Na maioria dos objetos Fractais criados pelo homem é fácil identificar a autossimilaridade, já em fenômenos estudados pela natureza surgem conjuntos que não se encaixam na autossimilaridade, pois eles apresentam mais de um fator de escala, precisando então do conceito de autoafinidade. Exibindo então alguns sistemas característicos autoafins. Uma transformação autoafim “é quando esta leva um ponto $X = (x_1, \dots, x_n)$ em um novo ponto $X' = (p_1x_1, \dots, p_nx_n)$, onde os raios de escala p_1, \dots, p_n não são todos iguais” (REGÔ, 2012, p.10).

Definição 2 (Autoafinidade): Um conjunto de pontos S é dito autoafim com respeito ao vetor raio de escala $p = (p_1, \dots, p_n)$ se S for a união de N subconjuntos não sobrepostos S_1, \dots, S_N , em cada $S_i = p_i S$, com $i = 1, \dots, N$, é obtido de S a partir de uma transformação autoafim.

Os Fractais possuem também uma classificação que agrupa os tipos de Fractais em três grandes grupos e alguns deles com subgrupos, que são separados de acordo com a forma que foram gerados e o seu grau de autossimilaridade e autoafinidade. Mas como o estudo exclusivo dos Fractais não é o foco desta pesquisa, e estamos apenas introduzindo o que é a geometria fractal, iremos somente mostrar sua classificação. Temos então de acordo com Rabay (2013):

- Fractais definidos por sistemas de funções iteradas
 - Fractais pela Fronteira
 - Fractais por Remoção

- Fractais Tipo Dürer
- Fractais Tipo Árvore
- Fractais definidos por uma relação de recorrência
- Fractais aleatórios

2.2 DIMENSÃO FRACTAL

Pelas definições de dimensão para os objetos da geometria euclidiana, um ponto tem dimensão zero, uma reta dimensão um, planos bidimensionais tem dimensão dois e o espaço tem dimensão três, sempre definidos por números inteiros positivos a partir do zero. Já no cálculo da dimensão das figuras da geometria Fractal, nos deparamos com dimensões com números decimais, dízimas ou mesmo irracionais. A “dimensão fractal, que diríamos mais associada à aspereza, espessura, densidade, textura etc” (BARBOSA, 2005, p.66).

A dimensão fractal pode ser chamada em geral de não inteira. Para se calcular a dimensão fractal usamos a seguinte fórmula (BARBOSA, 2005, p.66):

$$\text{Dimensão} = \log(\text{número de segmentos}) / \log(\text{fator de aumento}) \text{ ou } \mathbf{D = \log n / \log m}$$

ou sem aplicar log em ambos os lados tínhamos $\mathbf{n = m^D}$.

Agora considere os dados a seguir para exemplificarmos como calcular a dimensão de um fractal. Vamos calcular a dimensão do fractal **Curva de Koch**.

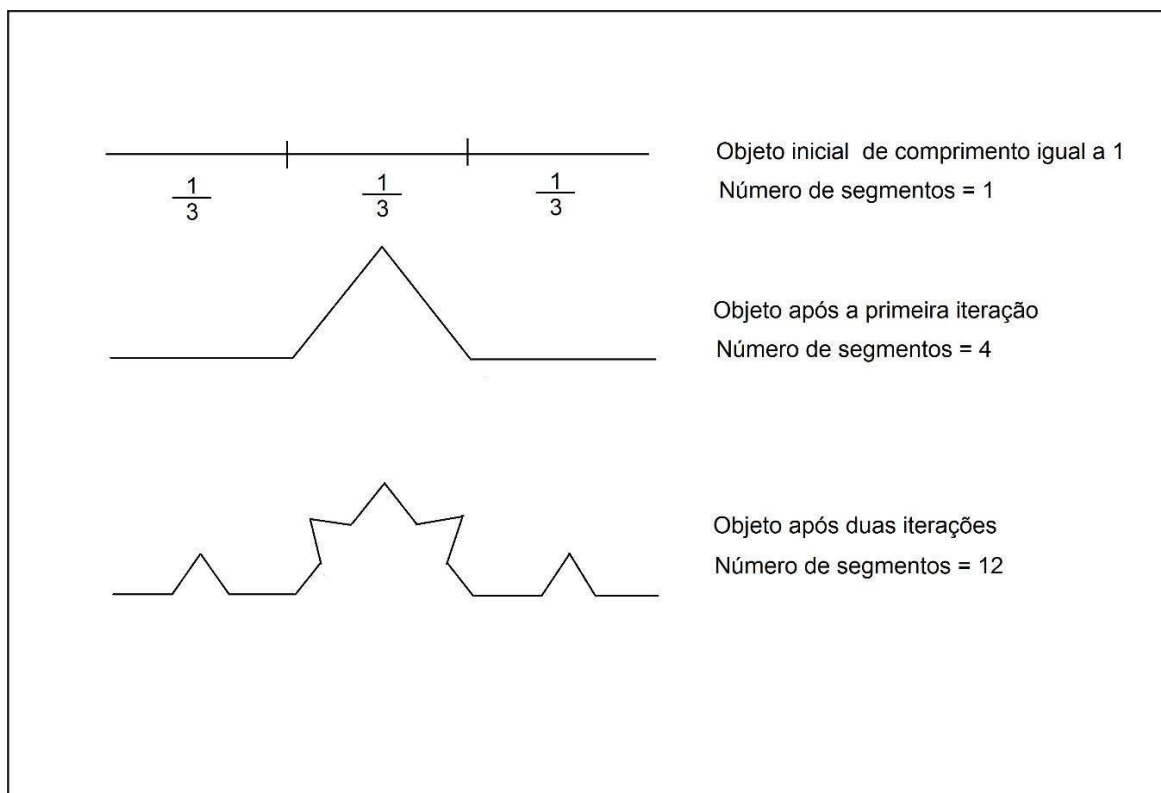


Figura 2: Construção do Fractal “Curva de Koch”.

Fonte: Pruduzida pelos autores.

Para esse fractal após a primeira iteração temos n (número de segmentos) = 4 (quatro), e fator de aumento $m = 3$ (três). Sendo que os fatores de aumento são obtidos através do inverso multiplicativo do fator de redução do fractal. Nesse caso para descobrir o fator de redução, pegamos um segmento de comprimento de 1 (uma) unidade e quando a dividimos em 3 (três) partes iguais, cada segmento ficará com $1/3$ (um terço) do comprimento inicial e o inverso multiplicativo de $1/3$ (um terço) é 3 (três), por isso o fator de aumento do Fractal “Curva de Koch” será 3.

Calculando então temos:

$$D = \log 4 / \log 3, \text{ que é aproximadamente } 1,262.$$

Lembrando que de acordo com o número de iterações e comprimento do segmento podemos ter dimensões diferentes, pois como dito acima essa dimensão não inteira serve para nos dar noções de aspereza, densidade e várias

outras características do objeto que fogem apenas do ponto, reta e plano. Como visto acima o valor da dimensão do Fractal “Curva de Koch” é aproximadamente 1,262 (um inteiro e duzentos e sessenta e dois milésimos), ou seja, o que antes começou como um segmento de dimensão 1 (uma) após uma iteração teve sua dimensão modificada, nos mostrando que ele deixou de ser um segmento, mas também não se tornou um plano com dimensão 2 (dois), e sim um segmento que possui retas quebradas em sua estrutura.

2.3 MULTIFRACTAL

Como vimos anteriormente podemos calcular a dimensão dos objetos Fractais de diversas formas, sendo sua dimensão uma espécie de “digital” do Fractal, tendo o valor numérico, grande importância para um conhecimento prévio da forma do Fractal que será estudado. Nos objetos Fractais, quando analisado sua autossimilaridade, vemos que para sua construção, foi utilizado um mesmo raio de escala de p para todo o comprimento S , ou seja, foi utilizado o mesmo fator de iteração em todo objeto Fractal.

Já os Multifractais (o próprio nome já introduz “Multi”) vem de múltiplos, ou seja, esse objeto não é formado por apenas por um raio de escala p para todo o comprimento S , ele possui em cada parte sua vários raios de escalas p para seu comprimento S . Como vimos na definição 2 (dois) os multifractais se encaixam nas transformações autoafins, tendo sempre no mínimo dois raios de escala p diferentes, em que cada qual possui sua própria dimensão Fractal.

Como podemos ver na Figura 2 (dois) abaixo, todos os objetos ou fenômenos naturais, não possuem uma dimensão geral como nos Fractais, mas sim várias dimensões para as respectivas escalas, sendo chamado de multifractais esses objetos ou conjuntos que se comportam de forma autoafim.

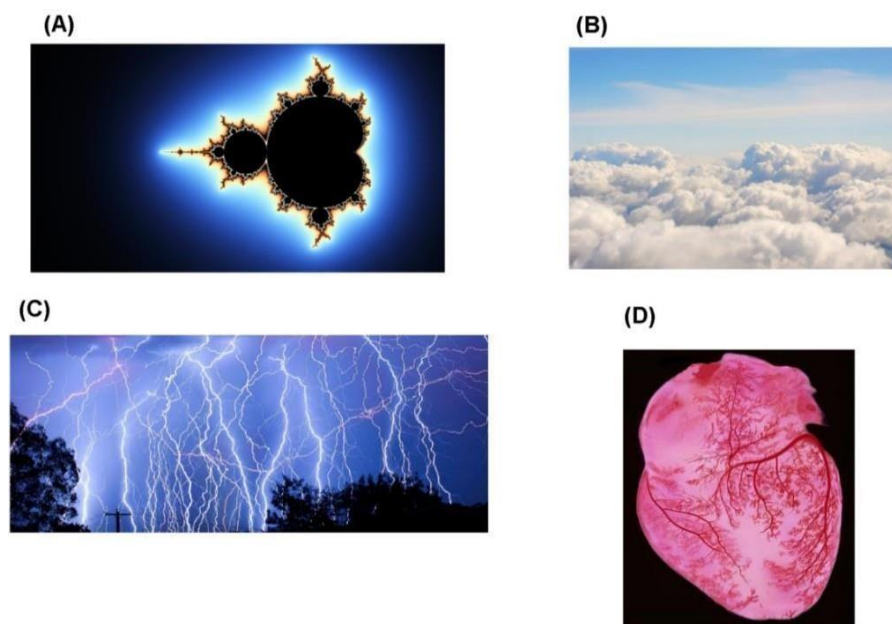


Figura 3: Exemplos de Multifractais: (A) Conjunto de Maldelbrot, (B) Nuvens, (C) Tempestade de Raios, e (D) Vasos sanguíneos de um coração humano.

Fonte: Imagens Google.

3 EXPOENTE DE HURST

Harold Edwin Hurst (1880-1978) foi um hidrólogo que trabalhou no projeto de construção da barragem de Assuã que dependia do comportamento do Rio Nilo, além de ter estudado problemas relacionados a água. Ele chegou nesta região por volta de 1907 e permaneceu por lá durante 40 anos. Hurst tinha como objetivo construir uma represa de modo que nunca transbordasse e também nunca ficasse muito vazia.

Existem vários métodos para se encontrar o expoente de Hurst, sendo a “Análise do Alcance Reescalado” (análise R/S), criado propriamente por ele para poder calcular a correlação presente nos dados de uma série temporal de medidas variáveis tais como níveis de rios, temperatura, chuvas, altura das marés e outros eventos de interesse físico que podem ser medidos diariamente. Estas análises levaram ao cálculo do expoente de Hurst, H (REGÔ, 2012).

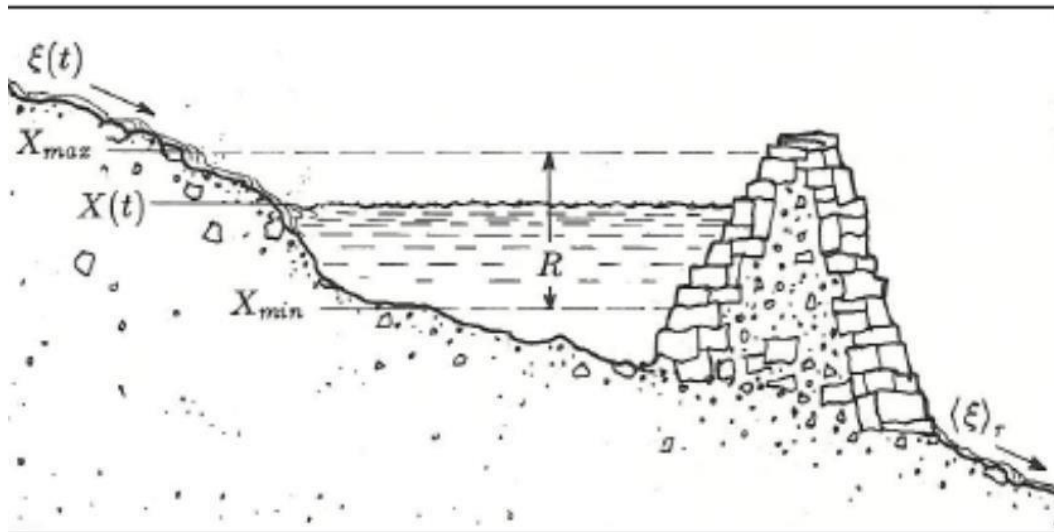


Figura 4: Exemplo de um reservatório de água com um influxo de entrada $\xi(t)$ e uma vazão média anual $\langle \xi(t) \rangle_\tau$.

Fonte: Imagens Google.

Sua análise ficou conhecida por análise R/S (Análise do Alcance Reescalado), onde o "R" deriva de "range(alcance)", sendo a diferença acumulada entre o volume máximo (X_{MAX}) e o mínimo (X_{MIN}) durante o ano e o "S" deriva de desvio padrão entre o influxo de água e média de sua vazão em determinado período, como podemos ver na equação 1 a seguir.

Considerando um reservatório de água, em um determinado período de tempo τ , começando sempre do primeiro ano u , sendo $\xi(u)$ o influxo de entrada e $\langle \xi \rangle_\tau$ a vazão média do período.

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} [\xi(u) - \langle \xi \rangle]^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

A partir desta razão Hurst descobriu, durante seus estudos, que a estatística R/S é igual à metade do número de observações elevado a um expoente "H", sendo este "H" denominado Expoente de Hurst.

$$\frac{R}{S} = (\tau/2)^H \quad (2)$$

A interpretação dos Expoentes de Hurst variando sempre de $0 < H < 1$ é a seguinte: se $0 < H < 0,5$ a série é antipersistente ou de memória curta, o que significa que uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa. Quando $H = 0,5$ temos a situação de um movimento puramente aleatório. Finalmente, quando $0,5 < H < 1$ os dados são persistentes, o que significa que uma tendência positiva no passado tem maior probabilidade de continuar positiva e vice-versa (RABAY, 2013).

4 METODO DE PESQUISA

Com o uso do método MDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis) iremos buscar encontrar o melhor grau de regressão para evidenciar a multifractalidade nessas séries temporais. Como é um método que utiliza muitos dados quantitativos seus passos foram desenvolvidos no *software* MatLab.

A técnica do MF DFA pode ser descrita através da generalização do método DFA. O método DFA (Análise de flutuação diferenciada) é mais utilizado em séries em que os pesquisadores buscam evidenciar se naquela série existem comportamentos Fractais. Sendo MF DFA uma versão modificada do DFA para buscar à análise de flutuação multifractal diferenciada, ou seja, se aquela série estudada apresenta um comportamento Multifractal (YING et al., 2009). O MF DFA, que foi desenvolvido por (KANTE LHARD et al., 2002), consiste no desenvolvimento de seis etapas que vão desde a determinação do perfil até a análise do expoente de Hurst generalizado obtido na análise que está relacionado ao grau de regressão e a dimensão do multifractal.

Para desenvolver e explicar os passos do MF DFA vamos utilizar a série de dados e os modelos disponibilizados por Ihlen (2012) que desenvolve os passos da rotina do MF DFA no MatLab (HANSELMAN & LITTLEFIELD, 2003) e mostra passo a passo a análise de três séries temporais: Whitenoise, Monofractal e Multifractal. O motivo de pegarmos esses dados como exemplo foi porque são séries que irão exemplificar com clareza o que acontece em cada passo do método e facilitar o entendimento do leitor para que compreenda o método.

Iremos então explicar cada passo explicando primeiramente, como

funciona sua expressão matemática e logo abaixo mostraremos o gráfico do que aconteceu na série, ou seja, explicaremos os processos e simultaneamente mostraremos como o método funciona na série. Os três primeiros passos constituem, essencialmente, o método DFA. Sendo x_k uma série de comprimento N (no caso das séries disponibilizadas por Ihlen 2012 são 8000 pontos).

Passo1: Determinar o perfil

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

A subtração da média não é obrigatória, já que ela será eliminada no passo 3, quando retirarmos a tendência dos dados.

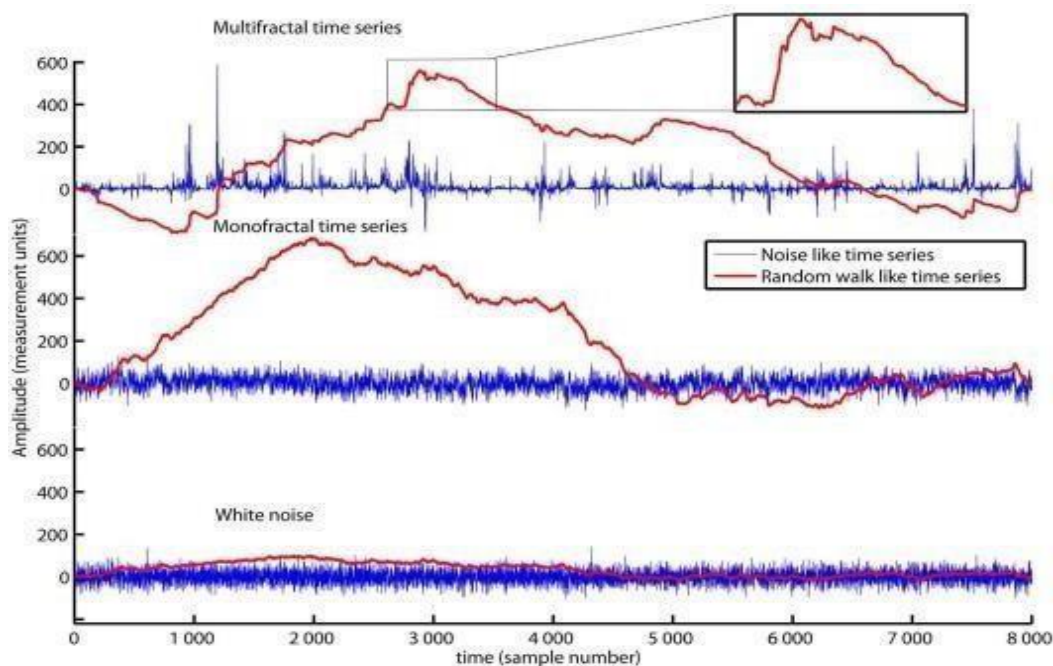


Figura 5: Gráfico após o passo 1.

Fonte: Ihlen 2012.

Como podemos ver a série que tinha um formato de ruído, após o passo 1 temos uma série temporal que chamamos de caminhada aleatória que já fica mais fácil de observarmos o comportamento. Sendo o ruído a série em azul e a caminhada aleatória a série de cor vermelho, sempre terminando em 0 (zero) por ser uma soma de desvios.

Passo 2: divida o perfil $Y(i)$ em $N_s \equiv \text{Inteiro}(N/s)$ segmentos de intersecção nula e de igual comprimento s . Como o comprimento N da série frequentemente não é um múltiplo da escala temporal s , sobrarão alguma porção no final. A fim de levar em conta esta parte, repete-se o mesmo procedimento partindo do final para o começo da série. Assim, teremos $2N_s$ segmentos no total. Com o comprimento N da série sendo sua quantidade de pontos e a escala temporal s é determinada conforme a série a ser estudada e os objetivos buscados.

Passo 3: Calcule a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por uma regressão de mínimos quadrado na série (é o grau desta regressão que será variado neste trabalho, ou seja, o método principal do MFDFA). Então, determine a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (4)$$

Para cada segmento $v, v = 1, \dots, N_s$ e

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (5)$$

Para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$. Aqui, $y_v(i)$ é o polinômio de regressão no segmento v .

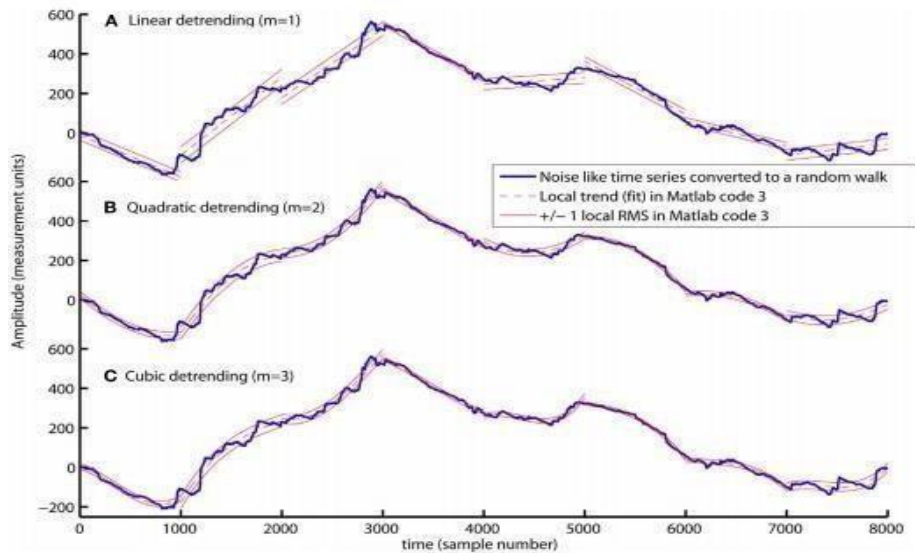


Figura 6: Gráfico com variação do grau de regreção.

Fonte: Ihlen 2012.

Passo 4: Calcule a média para todos os segmentos, a fim de obter a função de flutuação de q -ésima ordem:

$$F(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (6a)$$

Onde, em geral, o índice q pode tomar qualquer valor, exceto zero. Para $q = 2$ recupera-se o método padrão DFA. Daqui, os passos 2 a 4 devem ser repetidos para as várias escalas temporais s . Quando $q = 0$ a equação (4a) deve ser repetida pela equação (6b):

$$F_0(s) \equiv \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, v)] \right\} \quad (6b)$$

Passo 5: Determine o comportamento de escala da função de flutuação, analisando os gráficos log-log de $F_q(s)$ contra s para cada valor de q .

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (7)$$

A função $h(q)$ é o expoente de Hurst generalizado.

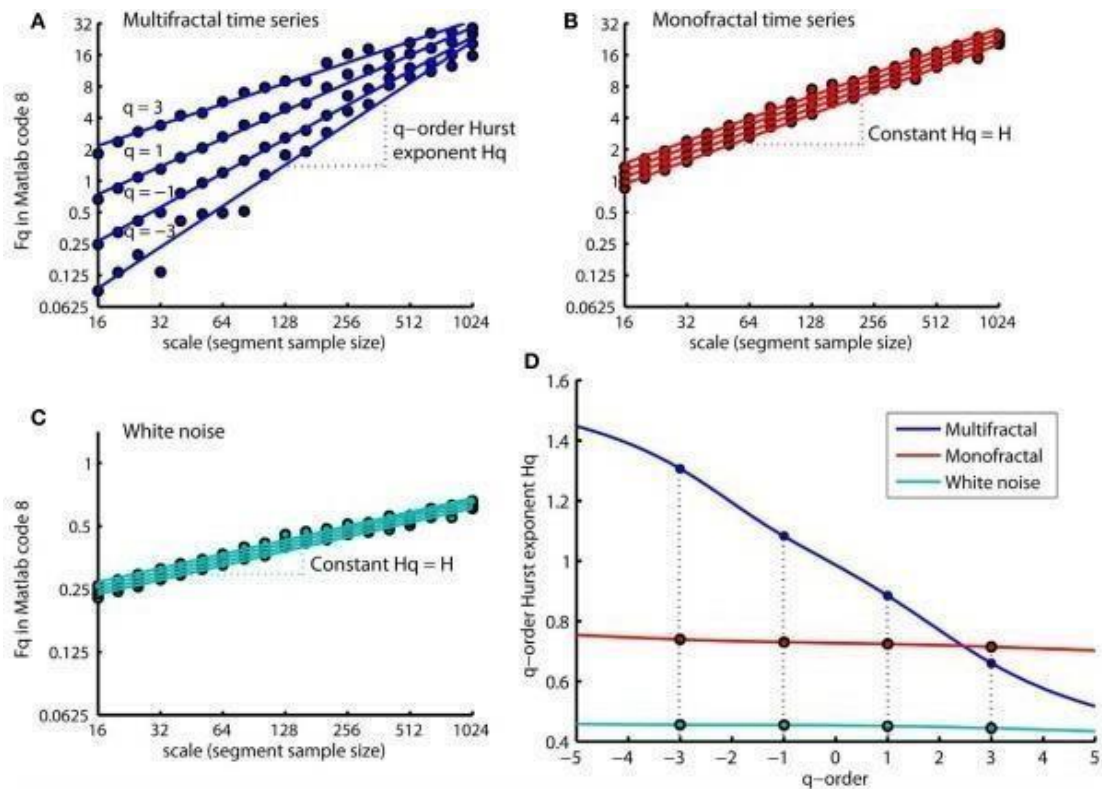


Figura 7: Gráfico com resultados finais do método.

Fonte: Ihlen 2012.

Passo 6: a equação (7) pode ser escrita como $F_q(s) = As^{h(q)}$, de onde obtemos, após tomar logaritmos em ambos os lados:

$$\text{Log}F_q(s) = \log A + h(q)\log s \quad (8)$$

Para séries temporais estacionárias, $H(2)$ é idêntico ao expoente de Hurst (H); por este motivo, $H(q)$ é chamado de Hurst generalizado. O expoente de Hurst generalizado $H(q)$, definido na equação 6a, relaciona-se com o expoente de escala $t(q)$, definido pela função de partição, no formalismo multifractal. Esta relação é computada por:

$$t(q) = qH(q) - 1 \quad (9)$$

É possível, ainda, relacionar $H(q)$ com a dimensão multifractal generalizada $D(q)$:

$$D(q) \equiv \frac{t(q)}{q-1} = \frac{qH(q)-1}{q-1} \quad (10)$$

Finalmente, podemos definir o expoente de singularidade de ordem q , $h(q)$, como a taxa de variação de $t(q)$ em relação a q . Assim,

$$h(q) = \frac{dt(q)}{dq} \quad (11)$$

O gráfico de $D(q)$ contra $h(q)$ é o espectro multifractal. Nele podemos visualizar o parâmetro Δh_q .

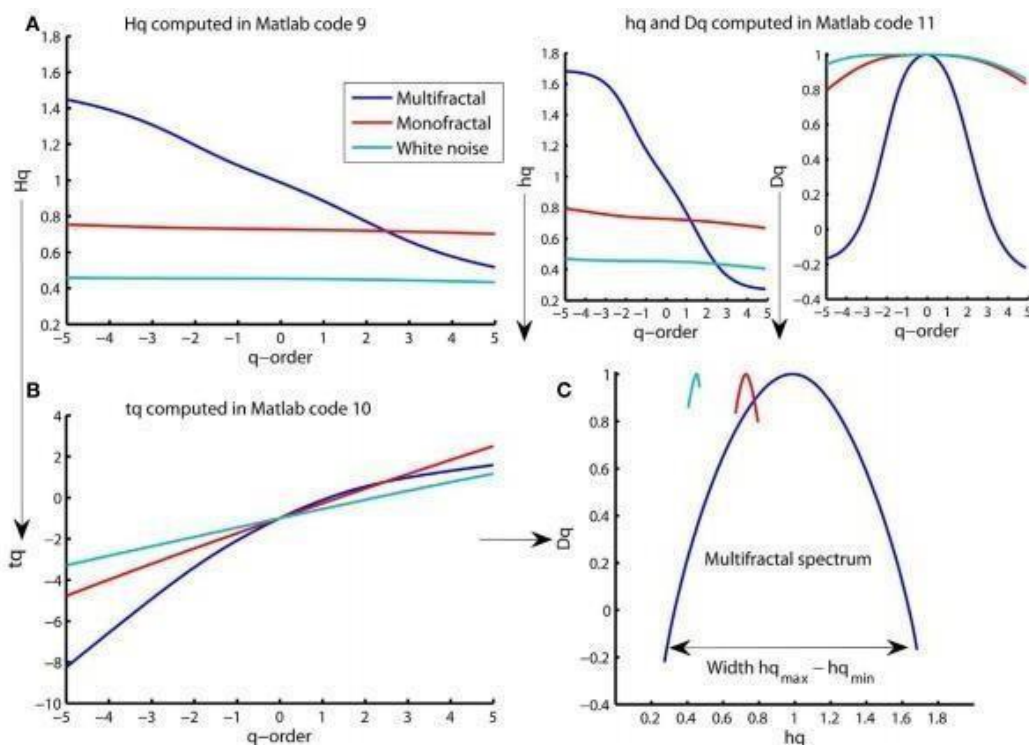


Figura 8: Gráfico com análise dos valores de h_q e expoentes Hurst obtidos.

Fonte: Ihlen 2012.

4.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste subcapítulo mostraremos brevemente a interface do software e detalhes da programação do método MFDFA, pois o foco trabalho é, analisar o melhor grau do polinômio de regressão para evidenciar a multifractalidade em séries temporais financeiras, e não explicar a programação do método. As figuras a seguir são *prints* da tela dos computadores dos autores e servirão de exemplo para mostrar parte da programação. Todas as séries de dados e programações exibidas são disponibilizadas por Ihlen (2012), não disponibilizaremos *prints* das programações feitas pelos autores, que foram aprimoradas com base na de Ihlen. Nas figuras 8, 9 e 10, serão mostradas, respectivamente, a interface do software, a implementação das séries de dados e programações feitas e a planilha de valores inseridos no *software*.

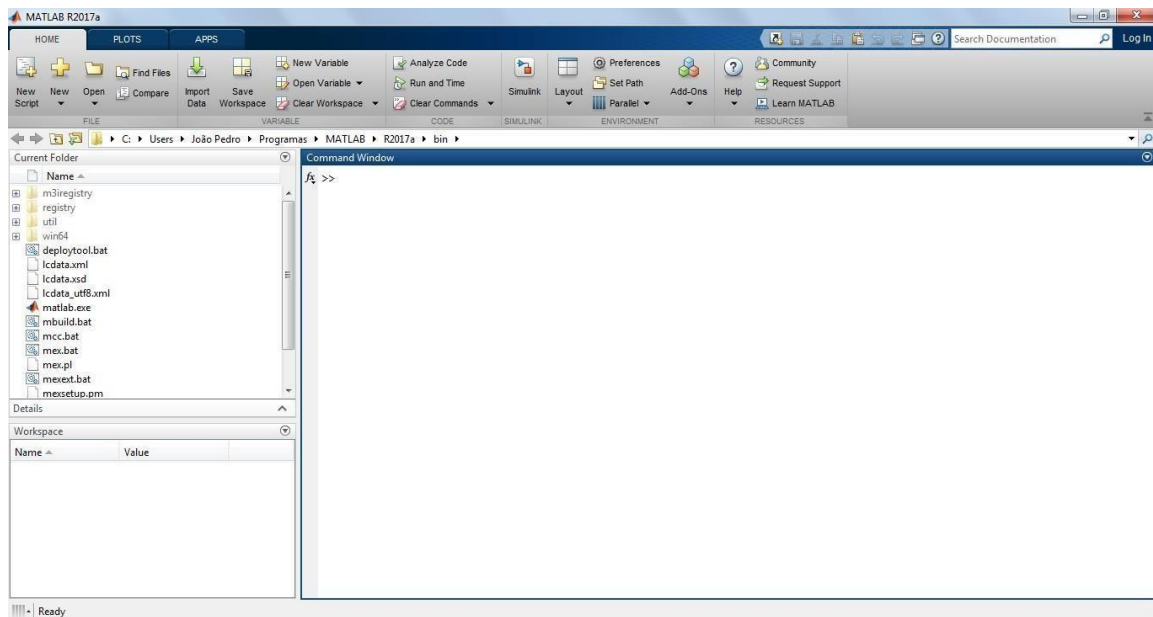


Figura 9: Interface do software MatLab.

Fonte: Produzida pelos autores.

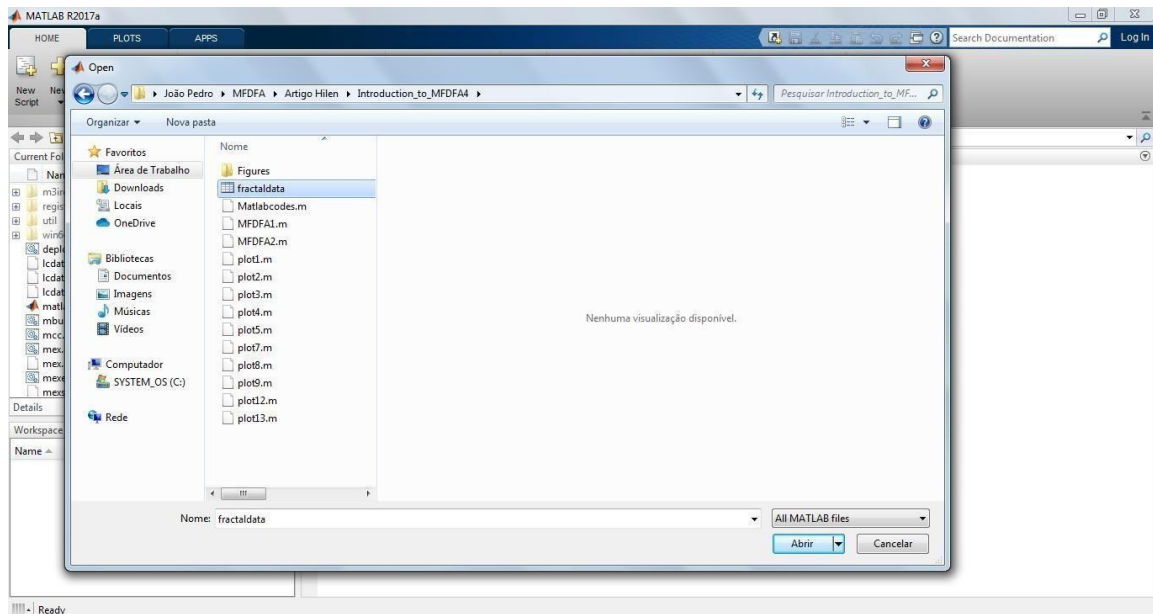


Figura 10: Inserção das séries de dados e programações.

Fonte: Produzida pelos autores.

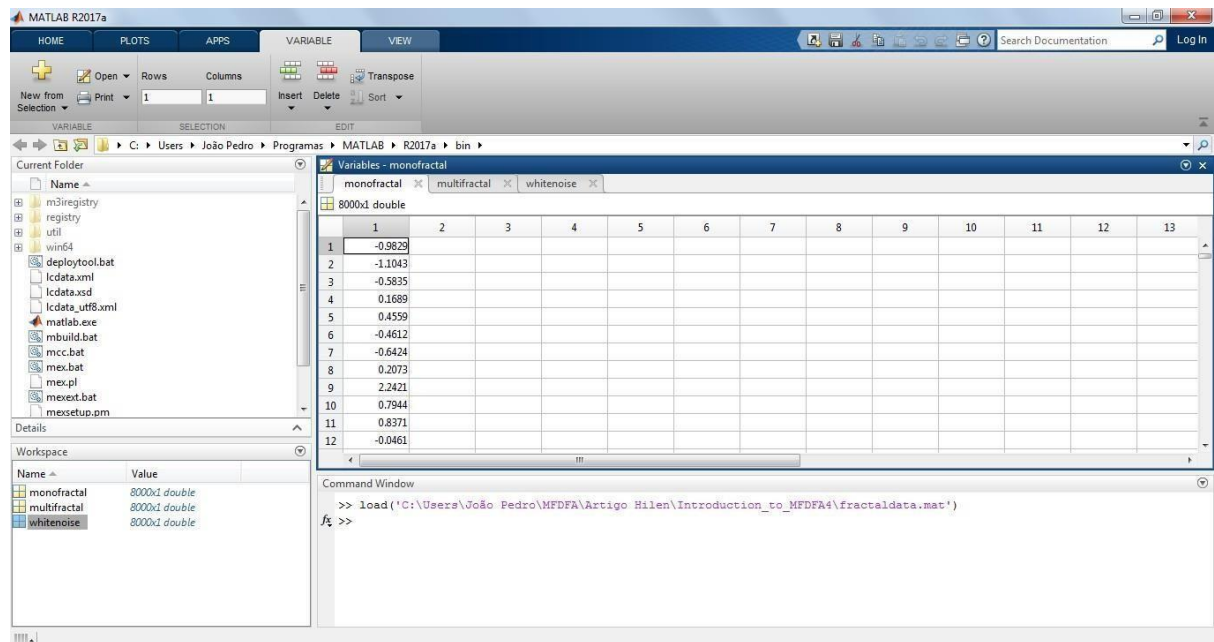


Figura 11: Série de dados inseridas, que são fundamentais para a programação.

Fonte: Produzida pelos autores.

Após a implementação das séries dados é possível começar a programação, as imagens abaixo mostram os roteiros de programação do método e das figuras obtidas, pois para cada uma delas existe uma programação. Utilizamos do método da tentativa e erro para aprimorar a programação e encontrar os melhores valores de escalas para realizar o estudo, e a imersão das funções e ferramentas do software disponíveis em seu website.

```

3
4
5 %Matlab code 1-----
6 RW1=cumsum(whitenoise-mean(whitenoise));
7 RW2=cumsum(monofractal-mean(monofractal));
8 RW3=cumsum(multifractal-mean(multifractal));
9 plot1;
10
11 %Matlab code 2-----
12 RMS_ordinary=sqrt(mean(whitenoise.^2));
13 RMS_monofractal=sqrt(mean(monofractal.^2));
14 RMS_multifractal=sqrt(mean(multifractal.^2));
15 plot2;
16
17 %Matlab code 3-----
18 X=cumsum(multifractal-mean(multifractal));
19 X=transpose(X);
20 scale=1000;
21 m=1;
22 segments=floor(length(X)/scale);
23 for v=1:segments
24     Idx_start=((v-1)*scale)+1;
25     Idx_stop=v*scale;
26     Index(v)=Idx_start:Idx_stop;
27     X_Idx=X(Index(v));
28     C=polyfit(Index(v),X(Index(v)),m);

```

Figura 12: Parte da programação feita do método MFDFA no MatLab.

Fonte: Produzida pelos autores.

```

1 - YMatrix1=[multifractal.*30,RW3];
2 - YMatrix2=[monofractal.*30,RW2];
3 - YMatrix3=[whitenoise.*30,RW1];
4 - X1=2600:3600;
5 - Y1=RW3(2600:3600);
6
7
8 - % Create figure
9 - figure1 = figure('PaperType','a4letter','PaperSize',[20.98 29.68],...
10 - 'Color',[1 1 1]);
11
12 - % Create axes
13 - axes1 = axes('Parent',figure1,'YTickLabel',{'0','200','400','600'},...
14 - 'YTick',[0 200 400 600],...
15 - 'XTickLabel',{},...
16 - 'XTick',zeros(1,0),...
17 - 'Position',[0.13 0.6545 0.7745 0.2705],...
18 - 'LineWidth',2,...
19 - 'FontSize',14);
20 - % Uncomment the following line to preserve the Y-limits of the axes
21 - ylim(axes1,[-220 700]);
22 - hold(axes1,'all');
23
24 - % Create multiple lines using matrix input to plot
25 - pplot1 = plot(YMatrix1,'Parent',axes1);
26 - set(pplot1(2),'LineWidth',2,'Color',[1 0 0]);
    
```

Figura 13: Parte da programação dos gráficos a serem gerados para a análise de resultados do método MFDDA.

Fonte: Produzida pelos autores.

Após termos programado todas as rotinas e gráficos, executamos a programação e os gráficos são gerados, conforme pode ser visto na figura 13, e a partir daí conseguimos fazer as análises e obter os resultados.

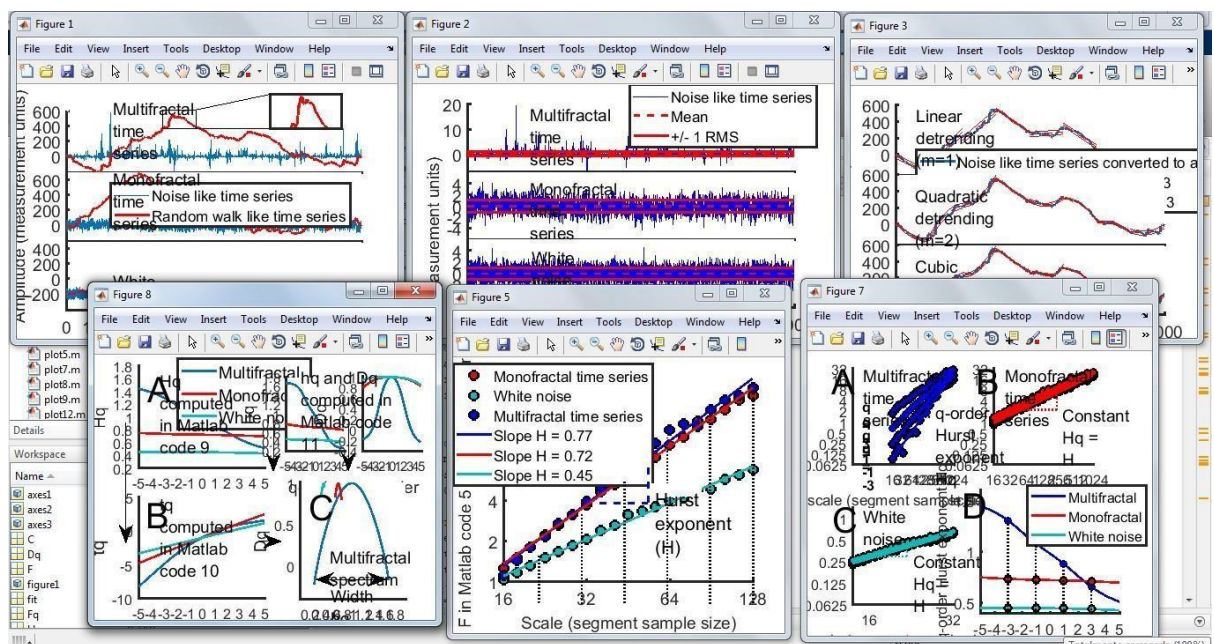


Figura 14: Tela do computador após a execução das rotinas de programação e obtenção dos gráficos.

Fonte: Produzida pelos autores.

4.2 DADOS

Para desenvolver as rotinas foram obtidas séries de referência a partir de um artigo sobre o método MFDFA (IHLEN, 2012). Foram utilizadas três séries, todas com 8000 valores:

- (1) Série de ruído branco (série de valores aleatórios);
- (2) Série monofractal;
- (3) Série multifractal;

O ruído branco é um sinal aleatório, com a mesma intensidade nas diferentes frequências. Tecnicamente, é uma sequência de variáveis aleatórias não auto correlacionadas, com média zero e variância infinita. As séries monofractais e multifractais obedecem às condições já expostas neste relatório.

Os gráficos destas séries temporais estão exibidos nas figuras 15, 16 e 17 a seguir:

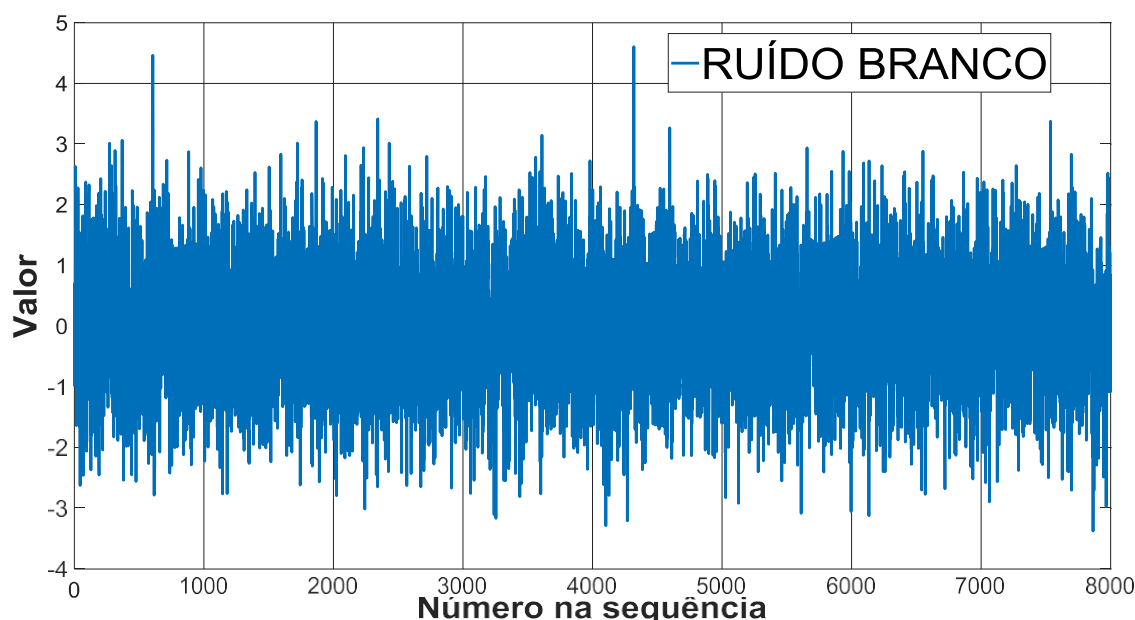


Figura 15: Série temporal do Ruído Branco

Fonte: Produzida pelo autor.

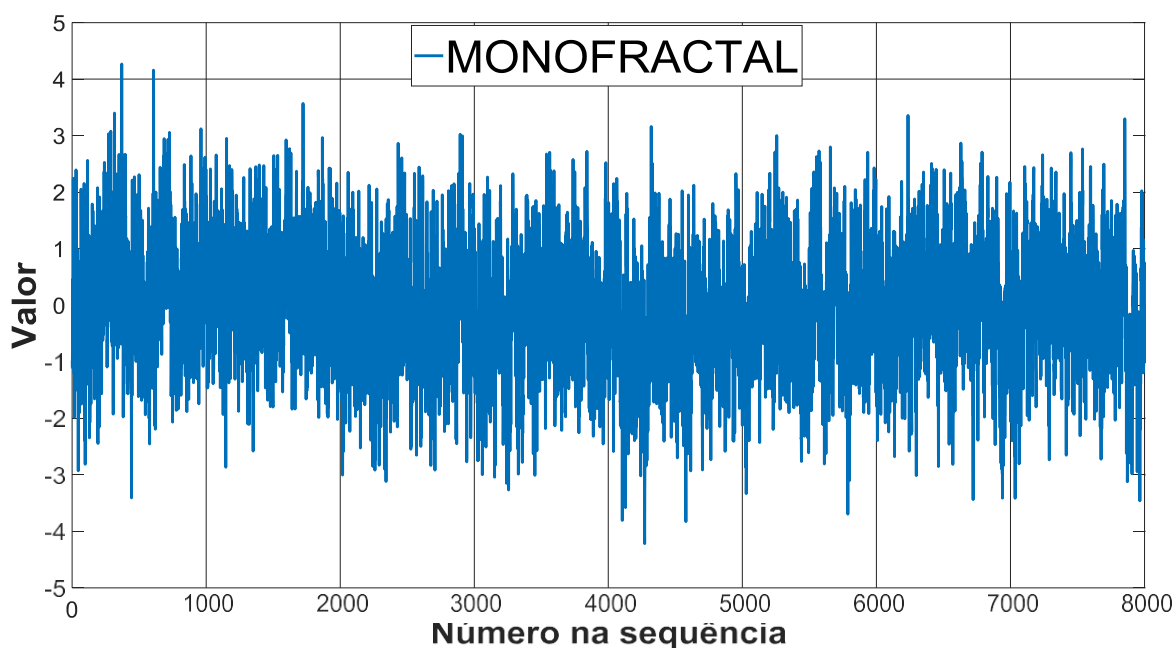


Figura 16: Série temporal Monofractal.

Fonte: Produzida pelo autor.

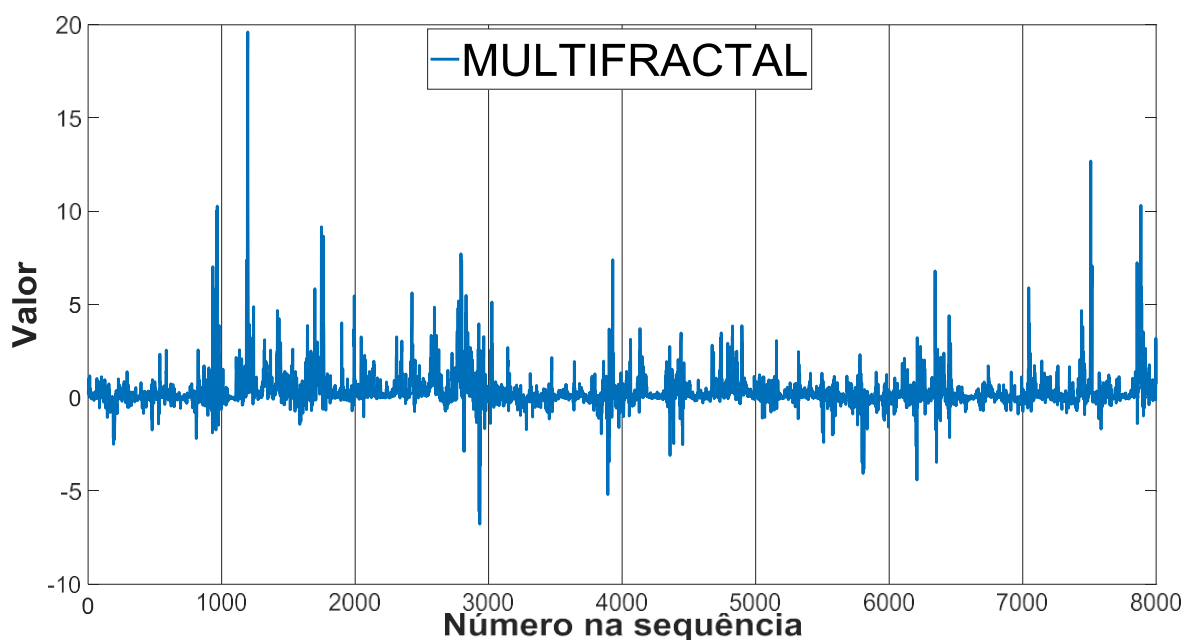


Figura 17: Série temporal Multifractal.

Fonte: Produzida pelo autor.

As séries financeiras, $x(t)$, utilizadas para os testes foram retiradas das bases Thompson e Yahoo. Elas foram coletadas para intervalos de tempo diferentes e têm tamanhos (quantidade de dados) também diferentes, a fim de não introduzir

algum erro sistemático nos resultados. Como são todas séries financeiras, foram transformadas (IHLEN, 2012) para séries de retornos logarítmicos, $r(t)$, de acordo com a definição:

$$r(t) = \ln[x(t)] - \ln[x(t - 1)] \quad (12)$$

As séries, agrupadas por categoria e seus gráficos de retorno, estão a seguir:

(i) Ações mais negociadas do mercado de ações brasileiro:

(1) BBDC4 (Banco Bradesco), de janeiro de 1998 a novembro de 2017, com 4890 valores.

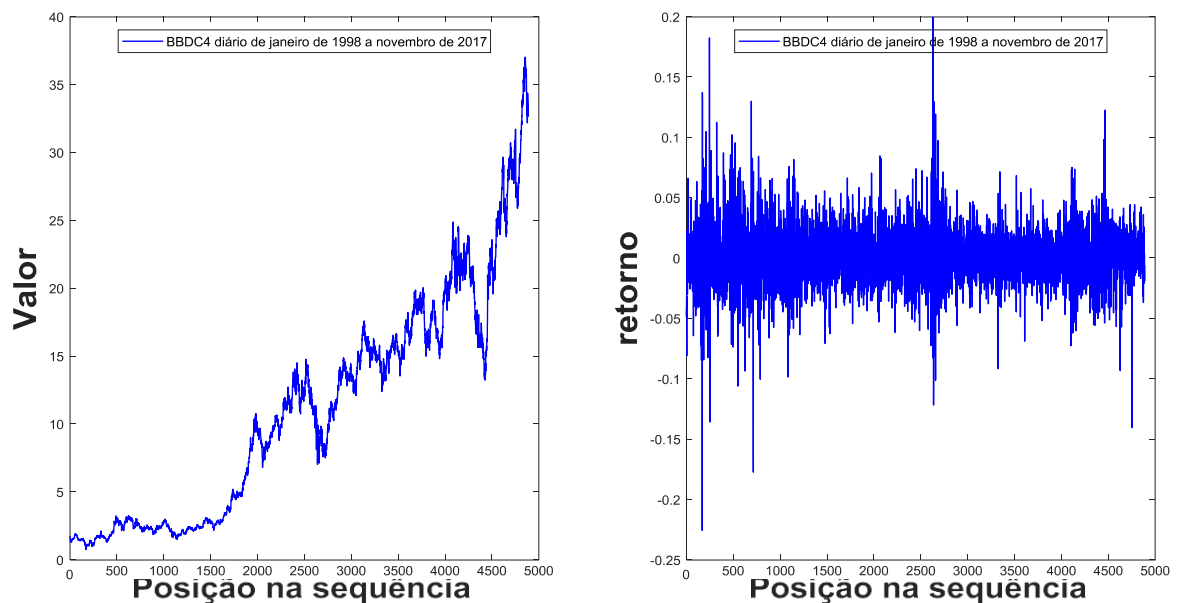


Figura 18: O gráfico da esquerda ilustra a série original BBDC4, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(2) ITUB4 (Banco Itaú), de janeiro de 1998 a novembro de 2017, com 4929 valores;

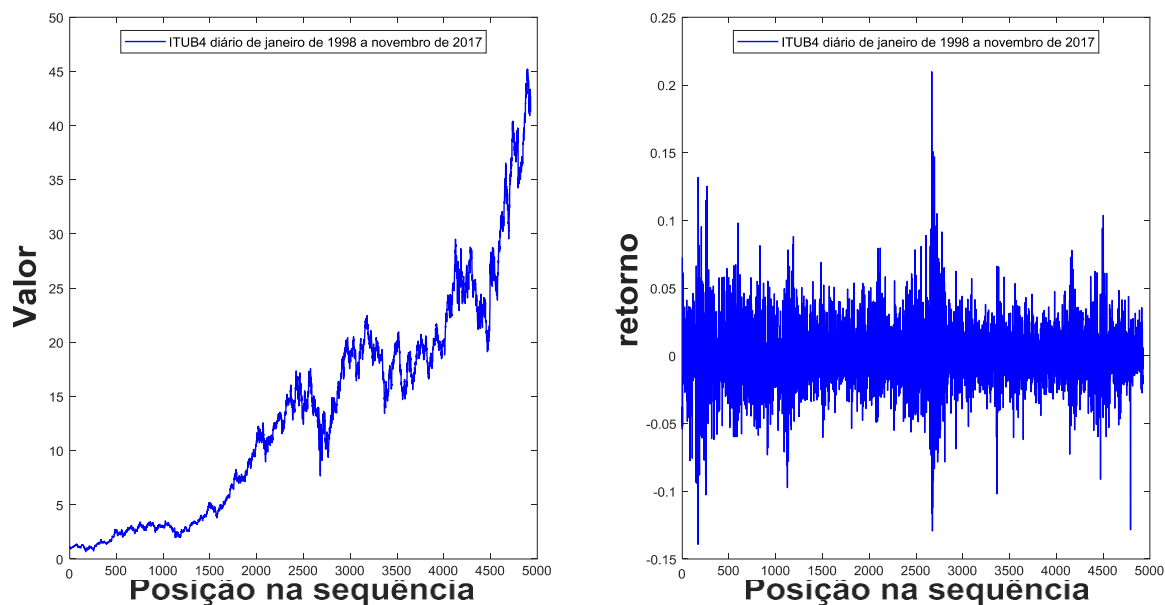


Figura 19: O gráfico da esquerda ilustra a série original ITUB4, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(3) PETR4 (Petrobrás), de janeiro de 1998 a novembro de 2017, com 4928 valores;

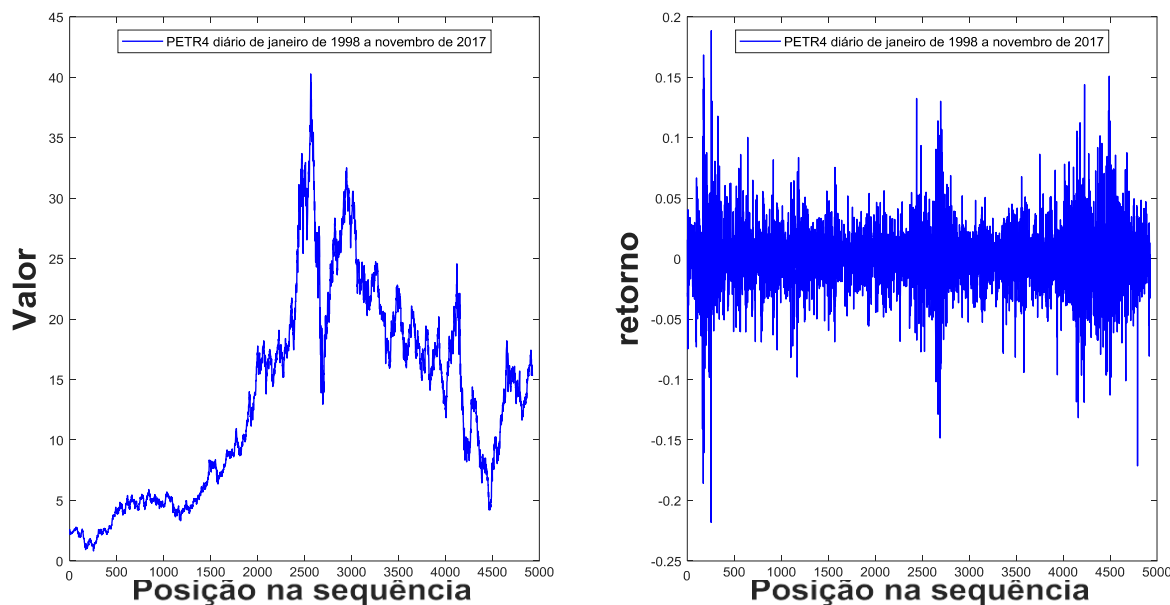


Figura 20: O gráfico da esquerda ilustra a série original PETR4, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(4) VALE5 (Vale), de janeiro de 1998 a novembro de 2017, com 4886 valores;

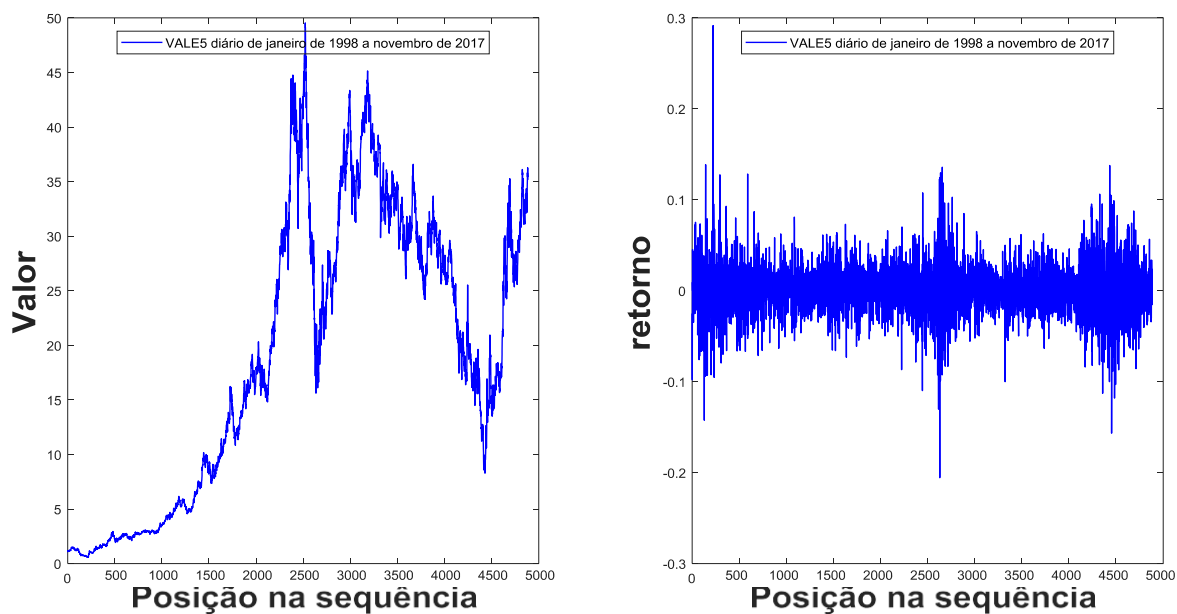


Figura 21: O gráfico da esquerda ilustra a série original VALE3, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(ii) Moeda Virtual

(5) BITCOIN , de 13/09/2011 a 20/11/2017, de 12 em 12 horas com 4415 valores;

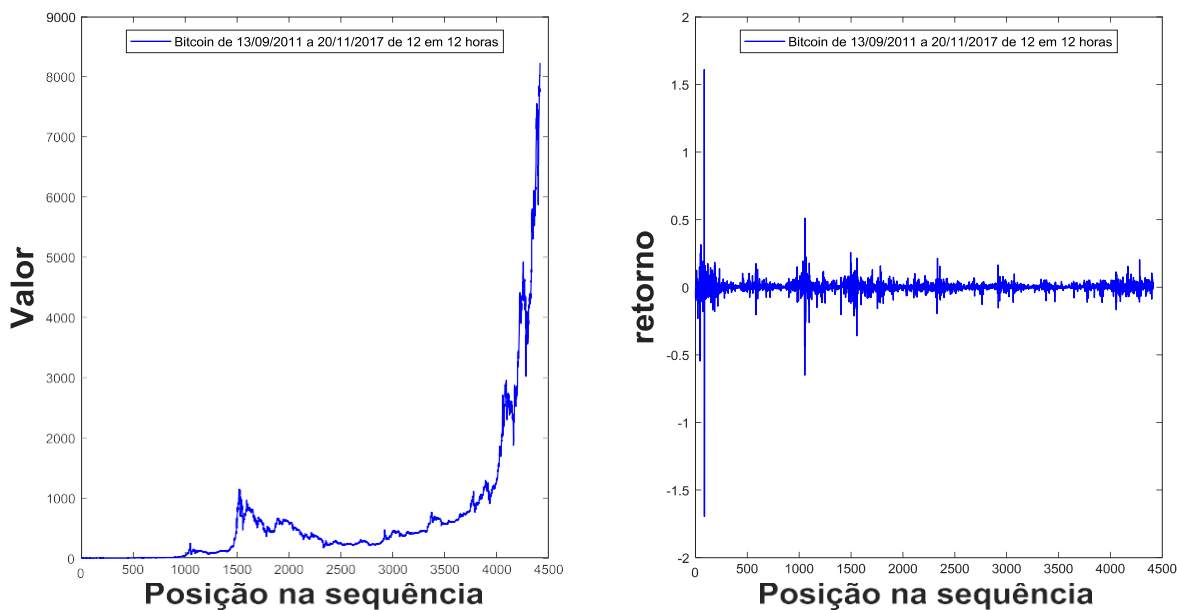


Figura 22: O gráfico da esquerda ilustra a série original BITCOIN, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(iii) Índices de bolsas internacionais:

(6) AEX (índice das 25 ações mais negociadas na bolsa de Amsterdam, Holanda), de 01 de janeiro de 1984 a 29 de novembro de 2017, com 8650 valores;

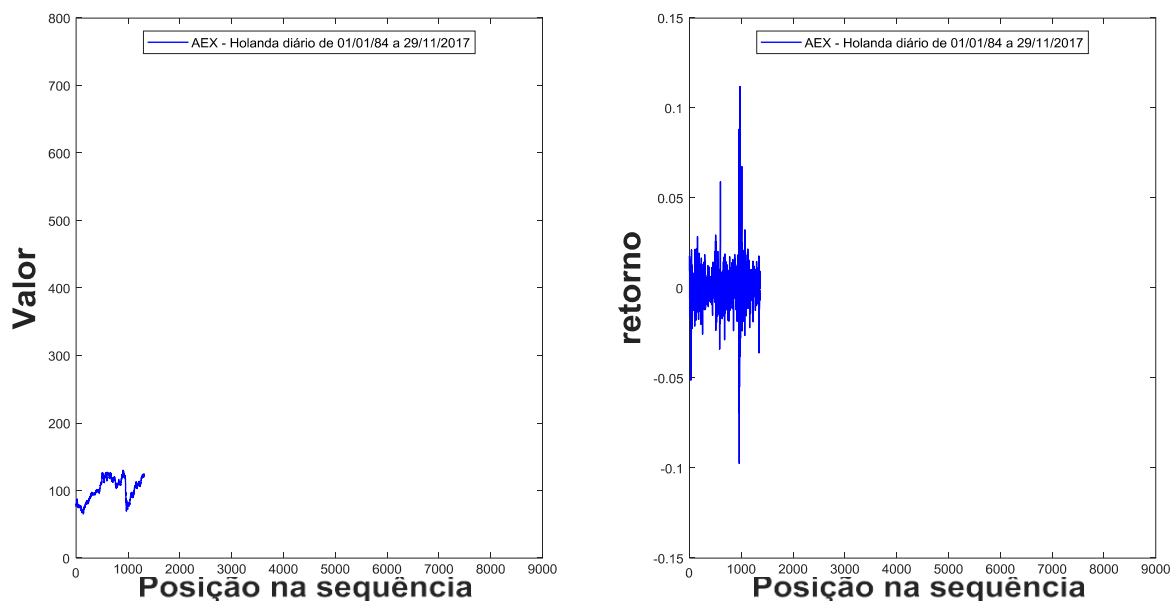


Figura 23: O gráfico da esquerda ilustra a série original AEX, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(7) BSESN (principal índice da bolsa de valores de Bombaim, Índia), de 01 de janeiro de 1984 a 20 de novembro de 2017, com 7963 valores;

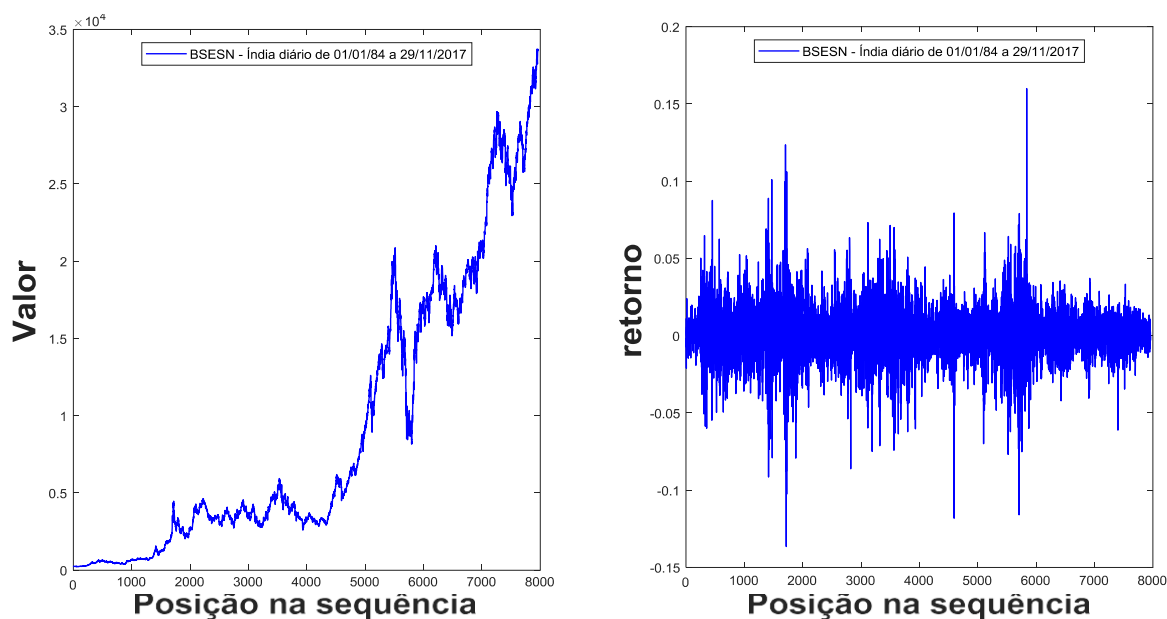


Figura 24: O gráfico da esquerda ilustra a série original BSESN, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(8) FTSE (índice da bolsa de valores de Londres, Inglaterra), de 01 de janeiro de 1984 a 20 de novembro de 2017, com 8572 valores;

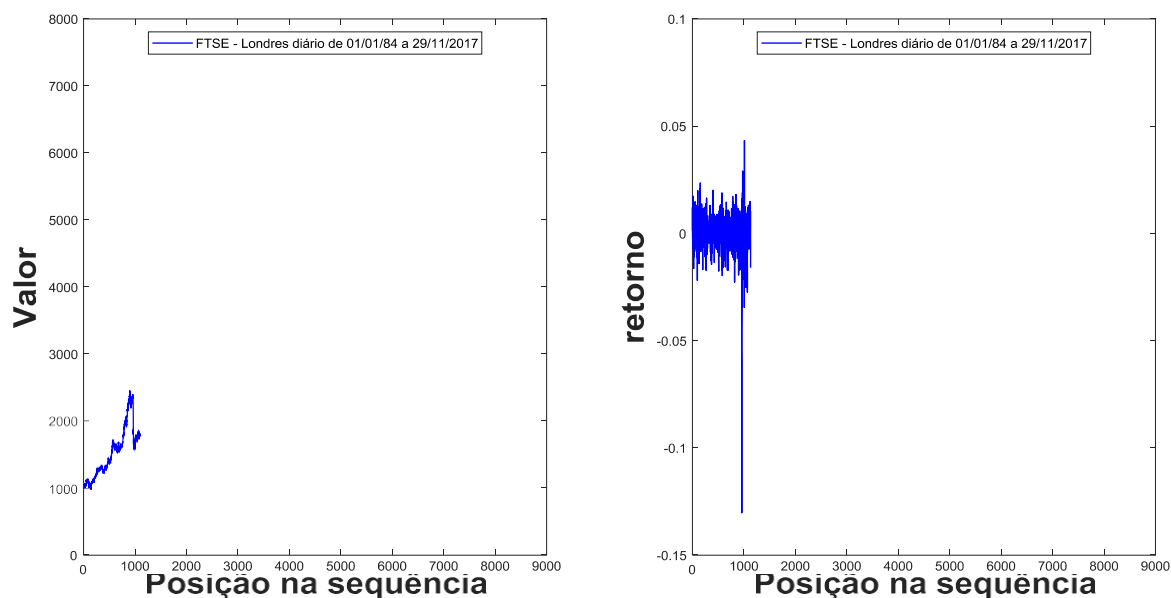


Figura 25: O gráfico da esquerda ilustra a série original FTSE, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(9) HSI (índice da bolsa de valores de Hong Kong), de 01 de setembro de 2011 a 20 de novembro de 2017, com 8379 valores;

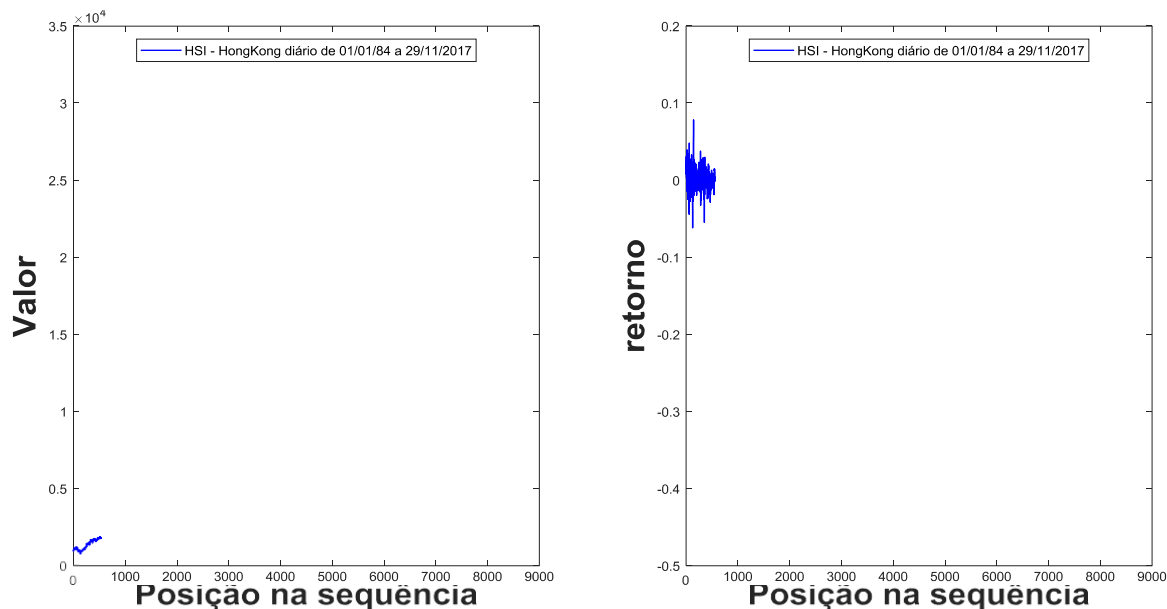


Figura 26: O gráfico da esquerda ilustra a série original HSI, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(10) NYSE (índice da bolsa de Valores de Nova Iorque, Estados Unidos), de 01 de setembro de 2011 a 20 de novembro de 2017, com 8558 valores;

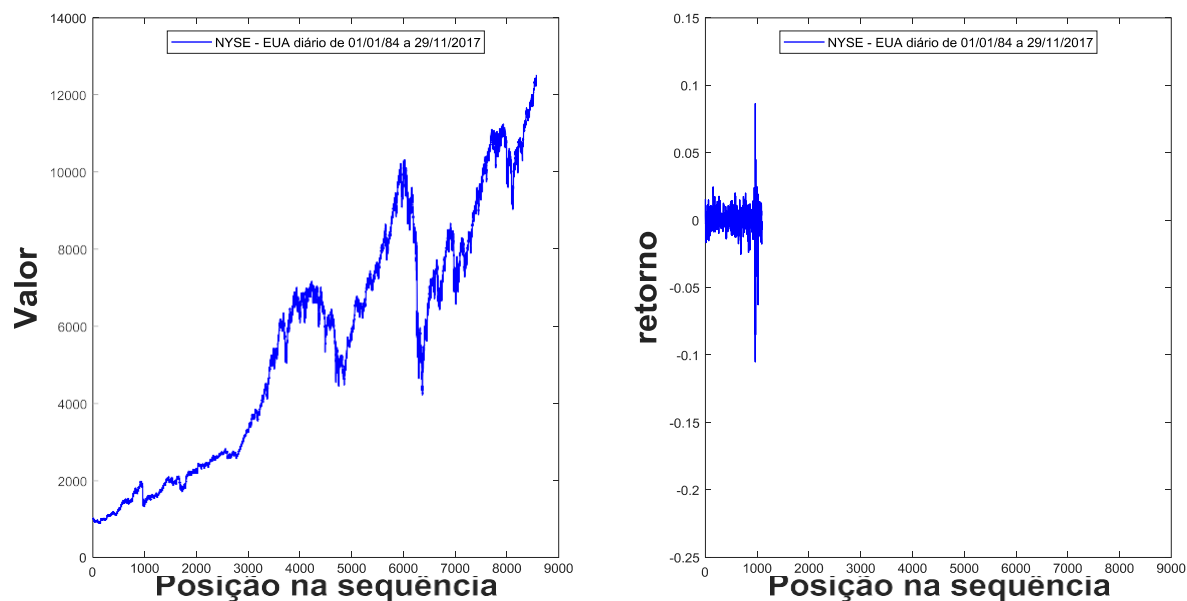


Figura 27: O gráfico da esquerda ilustra a série original NYSE, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(11) TOPX (índice da bolsa de valores de Tóquio, Japão), de 01 de setembro de 2011 a 20 de novembro de 2017, com 8510 valores.

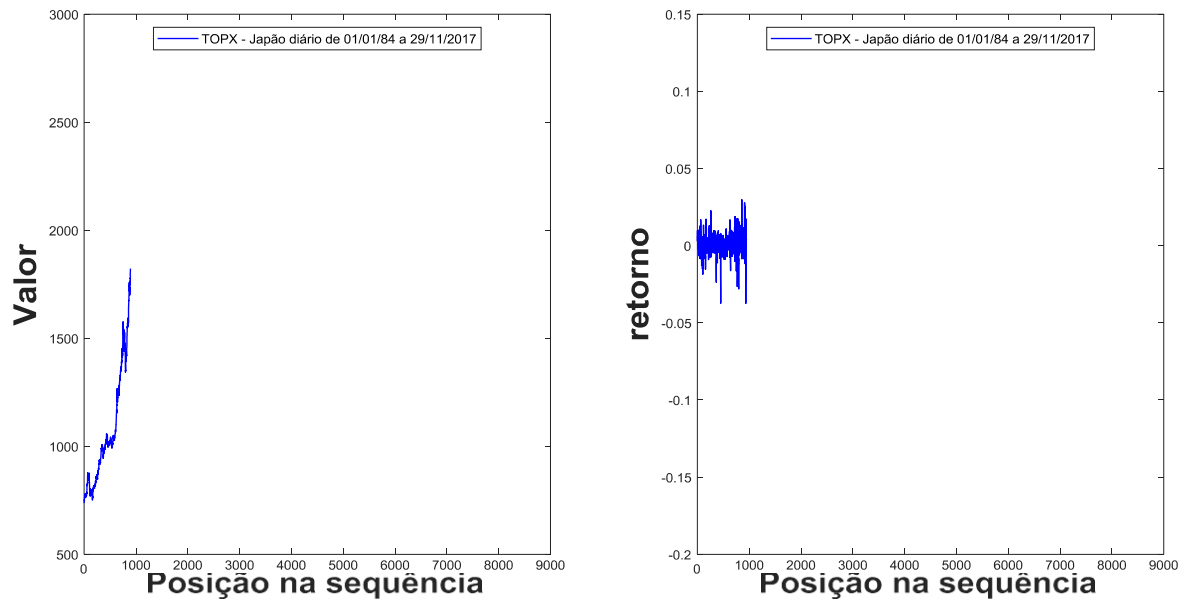


Figura 28: O gráfico da esquerda ilustra a série original TOPX, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(iv) Índice da principal bolsa nacional

(12) Ibovespa, de janeiro de 1998 a novembro de 2017, 4931 com valores;

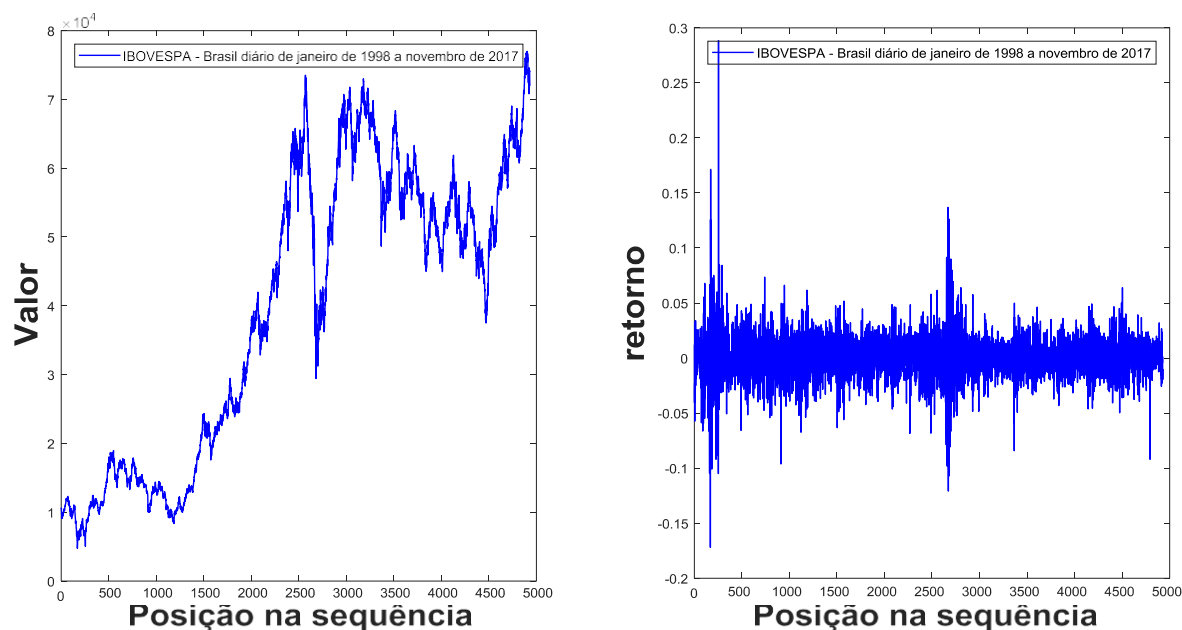


Figura 29: O gráfico da esquerda ilustra a série original Ibovespa, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(v) taxas de câmbio:

(13) EUR/USD, de janeiro de 1984 a novembro de 2017, com 8814 valores;

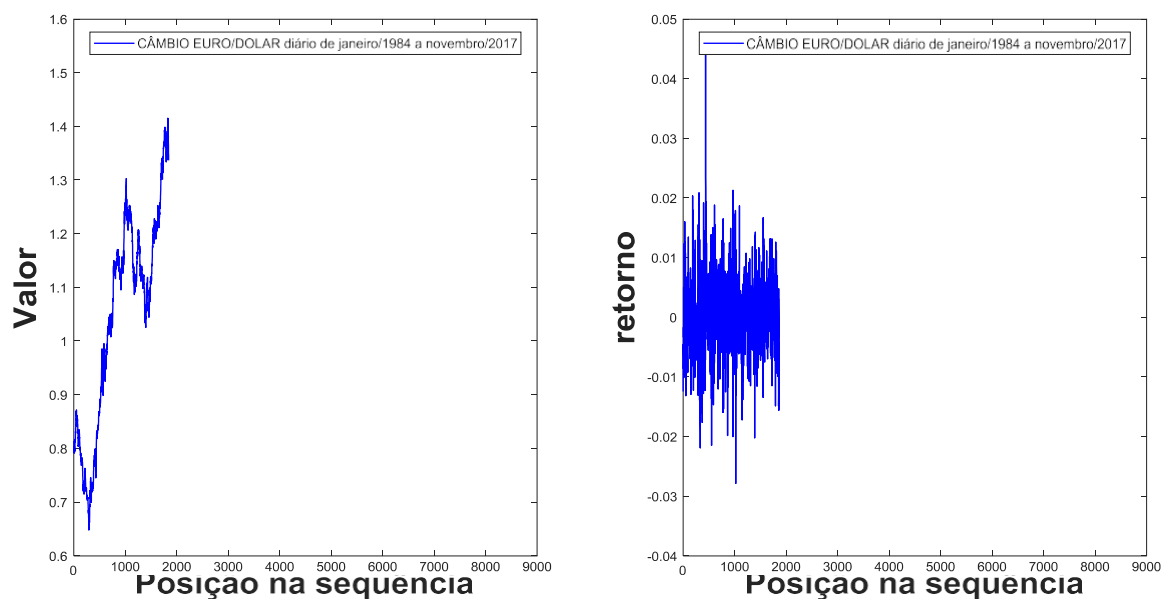


Figura 30: O gráfico da esquerda ilustra a série original EUR/USD, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(14) JPY/USD, de janeiro de 1984 a novembro de 2017, com 8822 valores;

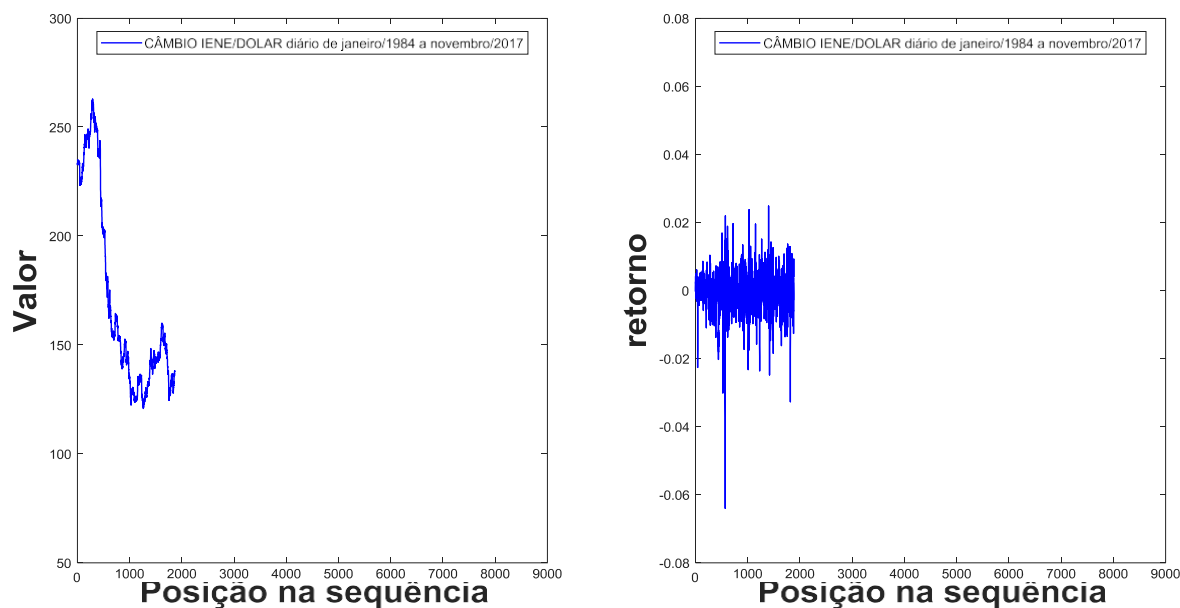


Figura 31: O gráfico da esquerda ilustra a série original JPY/USD, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(15) GBP/USD, de janeiro de 1984 a novembro de 2017, com 8811 valores;

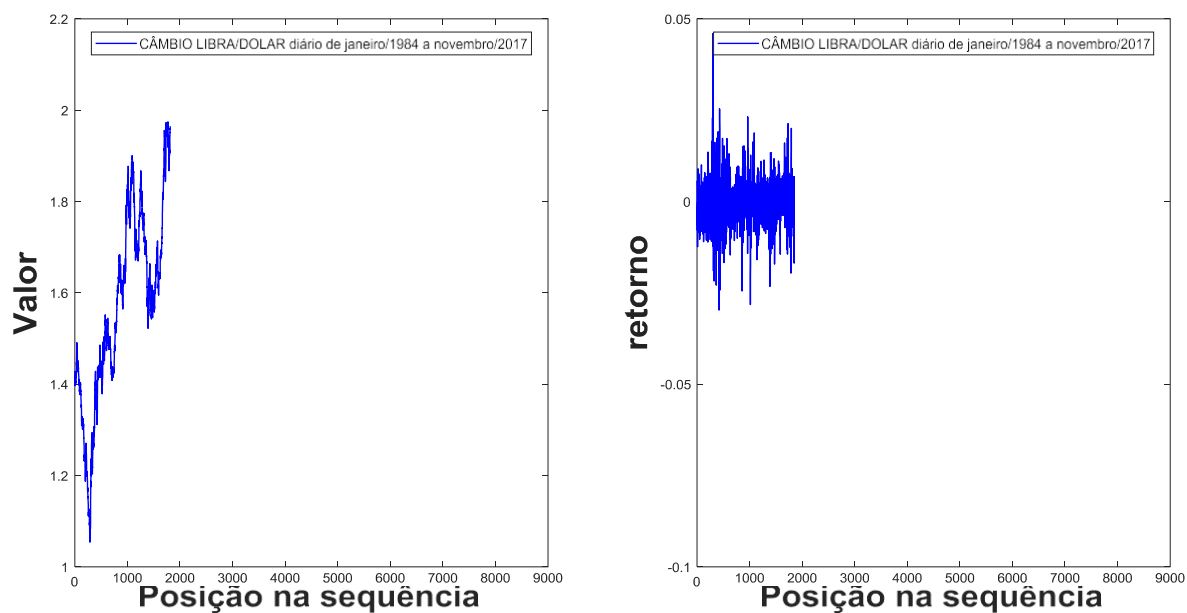


Figura 32: O gráfico da esquerda ilustra a série original GBP/USD, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

(16) INR/USD, de janeiro de 1984 a novembro de 2017, com 8772 valores.

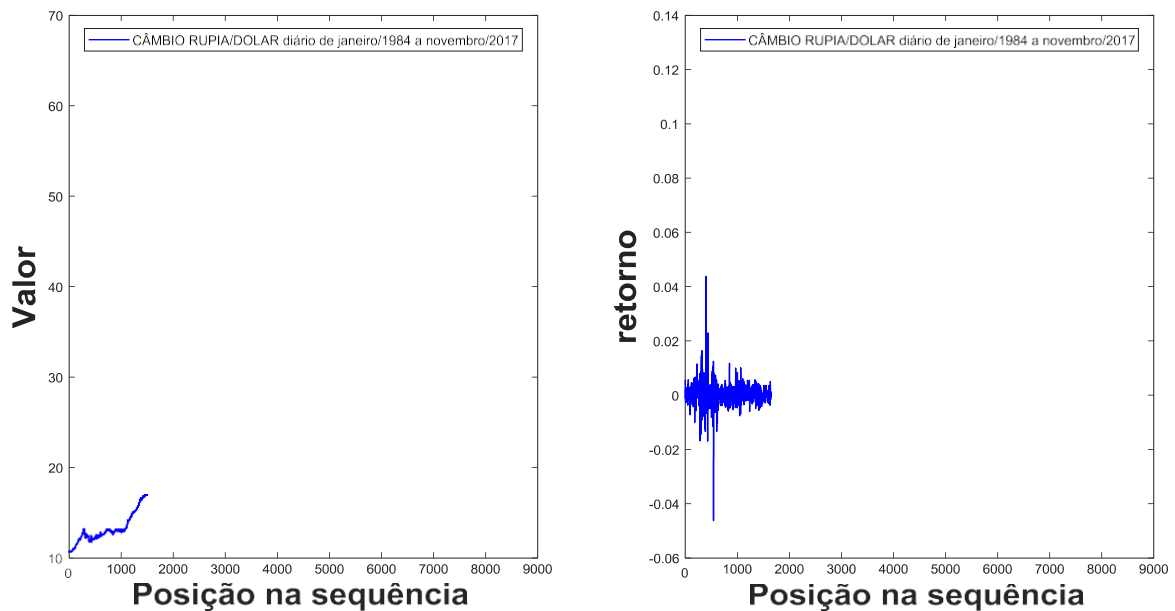


Figura 33: O gráfico da esquerda ilustra a série original INR/USD, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

Fonte: Produzida pelo autor.

As figuras 18 a 33 acima, mostram as transformações das séries para seus retornos logarítmicos, com o intuito de mostrar que é necessário para uma boa análise um refinamento da série. Diminuindo assim a variação dos valores, prática muito comum na literatura, quando se vai trabalhar com séries temporais com grande número de dados.

5 RESULTADOS E ANÁLISE

O foco deste trabalho é a procura da melhor regressão polinomial para uma etapa do cálculo da multifractalidade, aquela em que retira-se a tendência do perfil da série, Equações 4 e 5 e calcula-se a variância. Estas regressões correspondem a polinômios de grau um a cinco. Como exemplos destas regressões, são exibidos os dez gráficos a seguir. Todos eles foram obtidos para a série de câmbio Euro/Dólar, no período de janeiro de 1984 a novembro de 2017. Esta série tem 8814 valores e, no cálculo da multifractalidade, foi utilizado, para as diferentes escalas em ordem crescente, o seguinte vetor: [10:8:2010].

O primeiro grupo foi obtido para o décimo primeiro valor deste vetor (décima primeira escala), correspondendo a 90 valores. Foi considerado o terceiro intervalo para esta escala, que corresponde aos valores de posição 181 até 270:

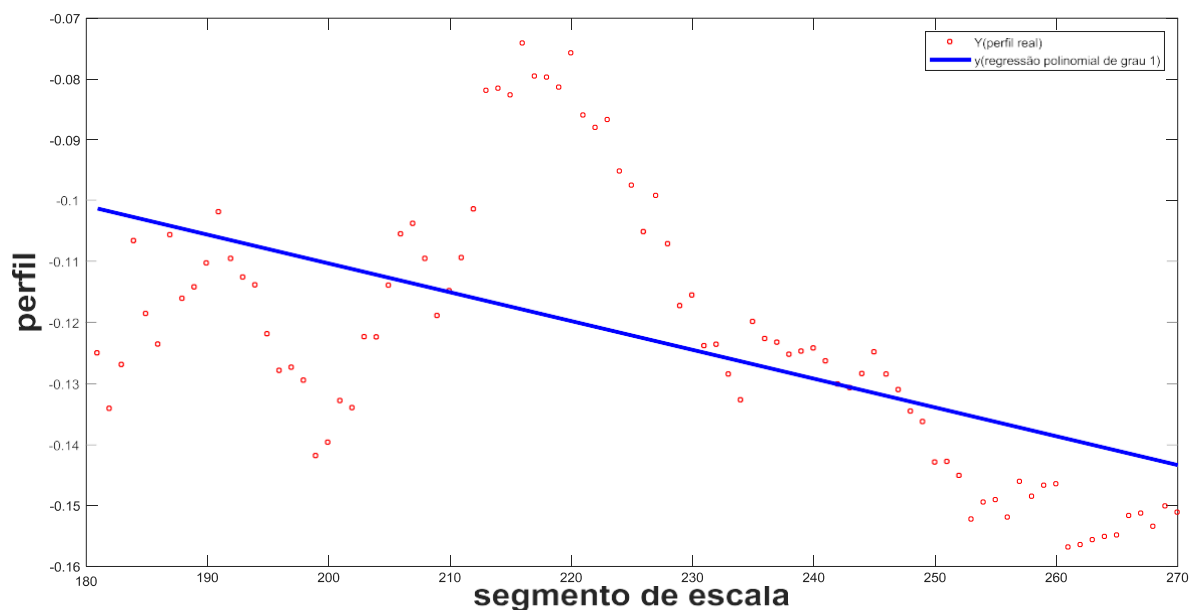


Figura 34: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 90 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 1 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

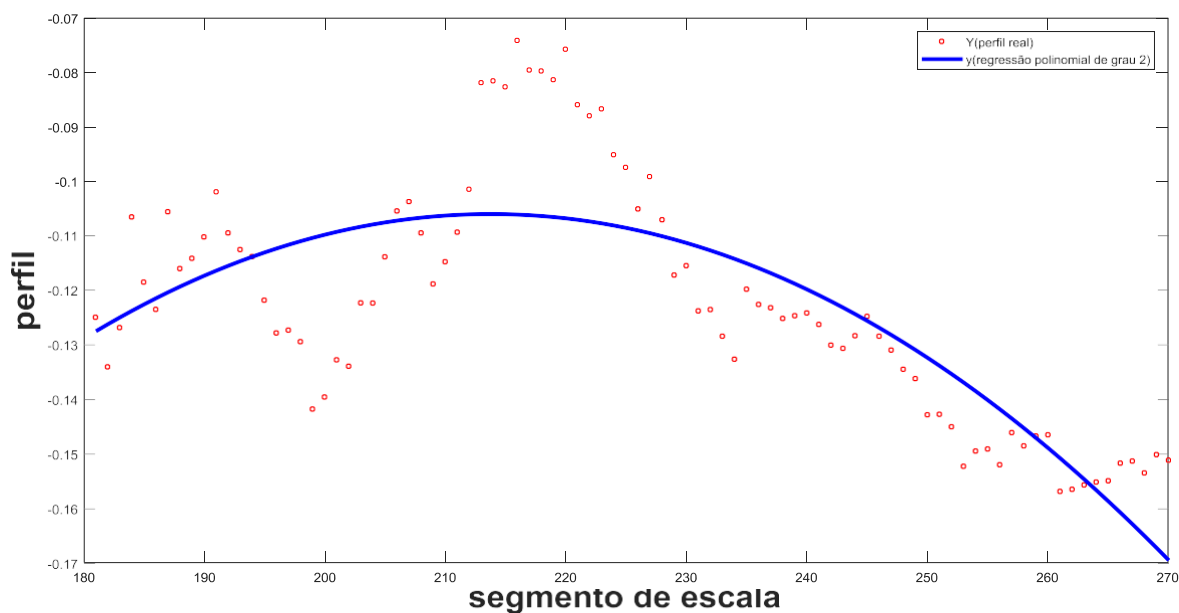


Figura 35: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 90 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 2 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

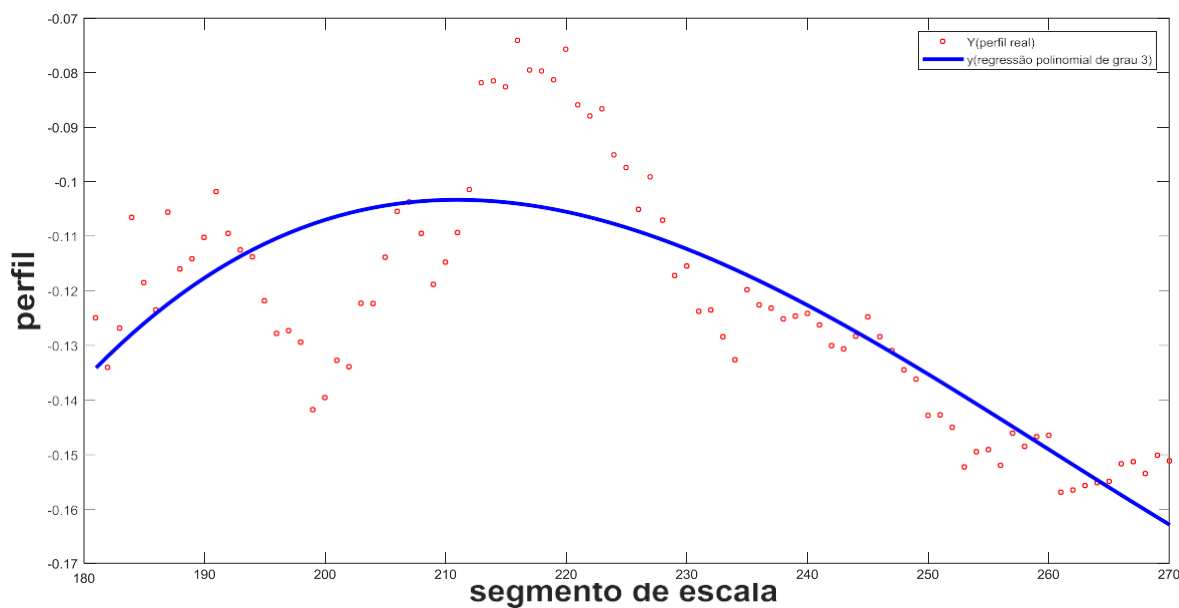


Figura 36: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 90 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 3 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

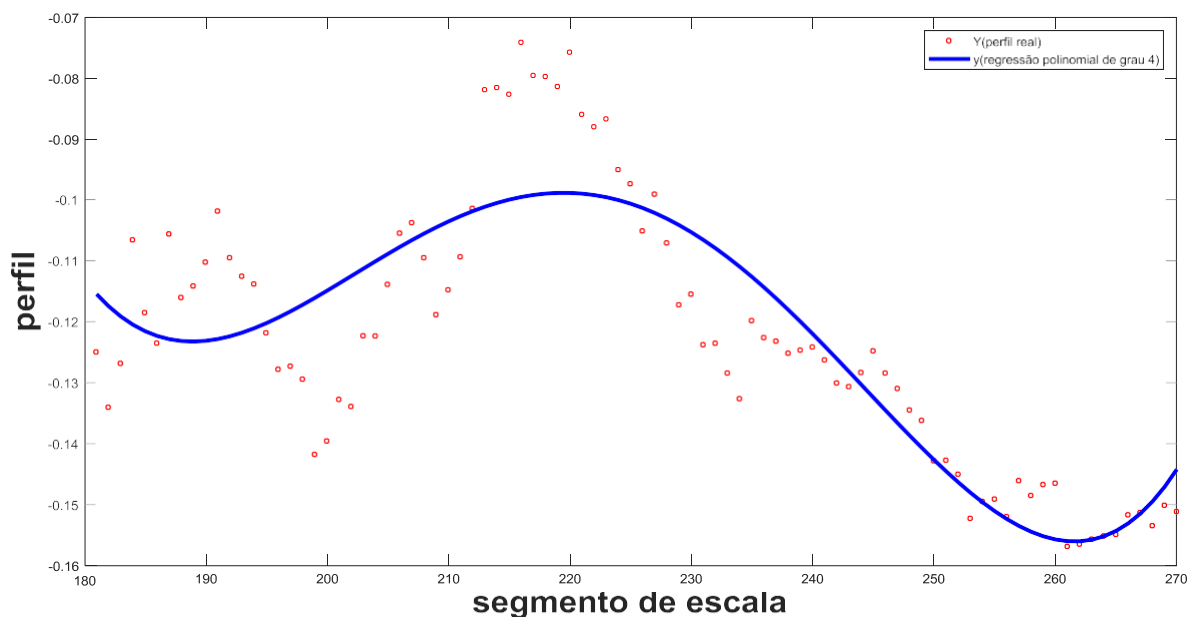


Figura 37: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 90 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 4 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

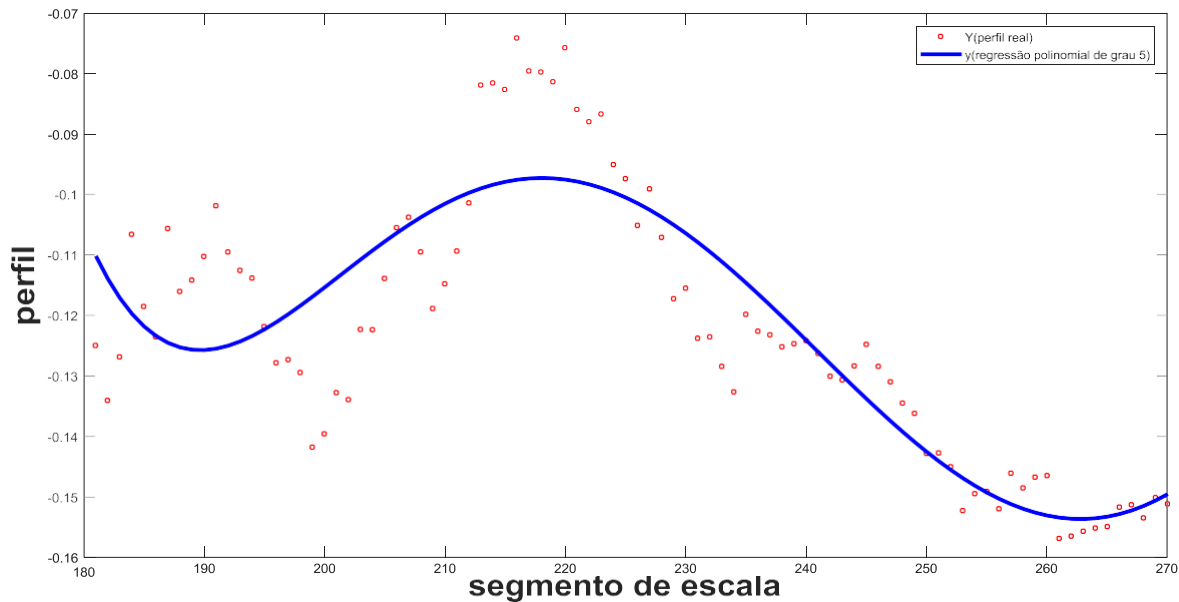


Figura 38: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 90 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 5 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

O segundo grupo foi obtido para o centésimo vigésimo sexto valor do vetor [10:8:2010] (centésima vigésima sexta escala), correspondendo a 1010

valores. Foi considerado o terceiro intervalo para esta escala, que corresponde aos valores de posição 2021 até 3030:

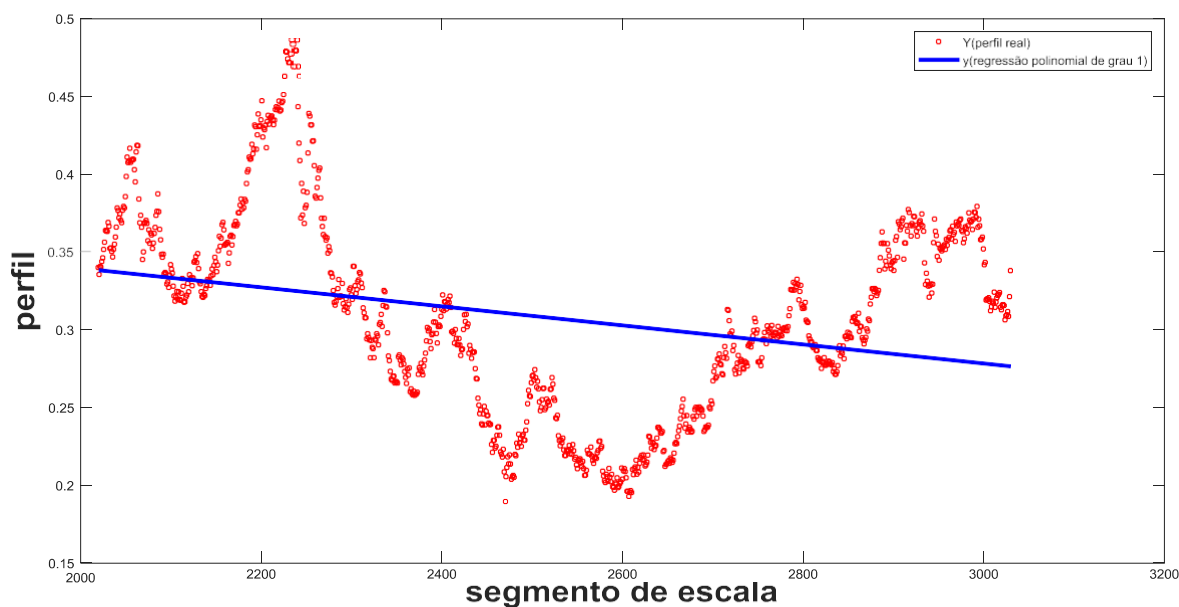


Figura 39: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 1010 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 1 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

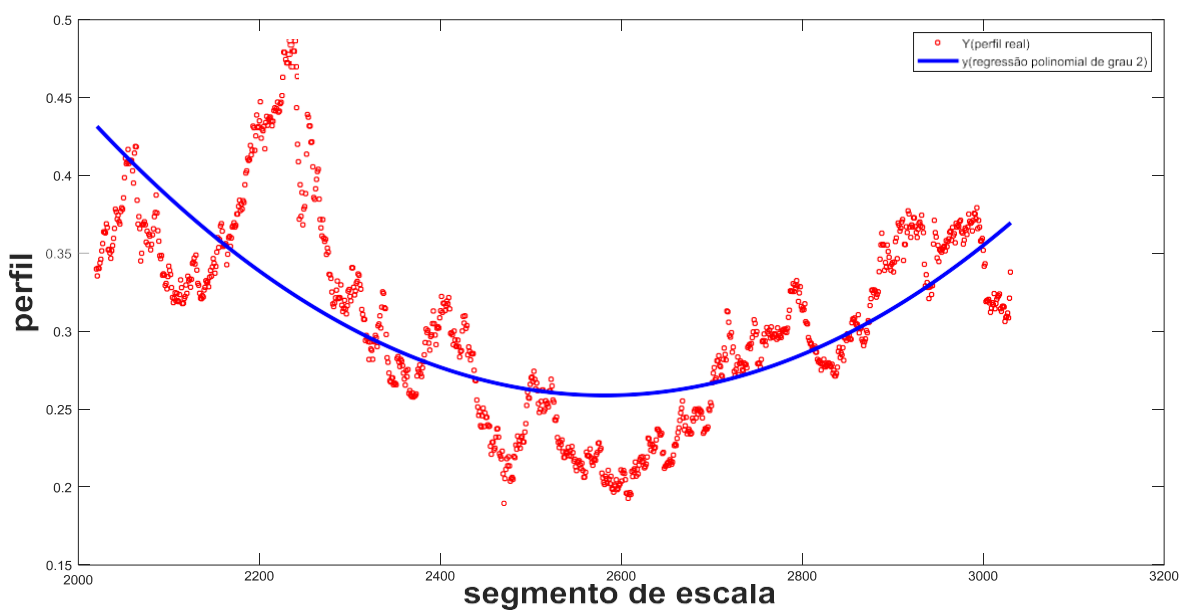


Figura 40: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 1010 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 2 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

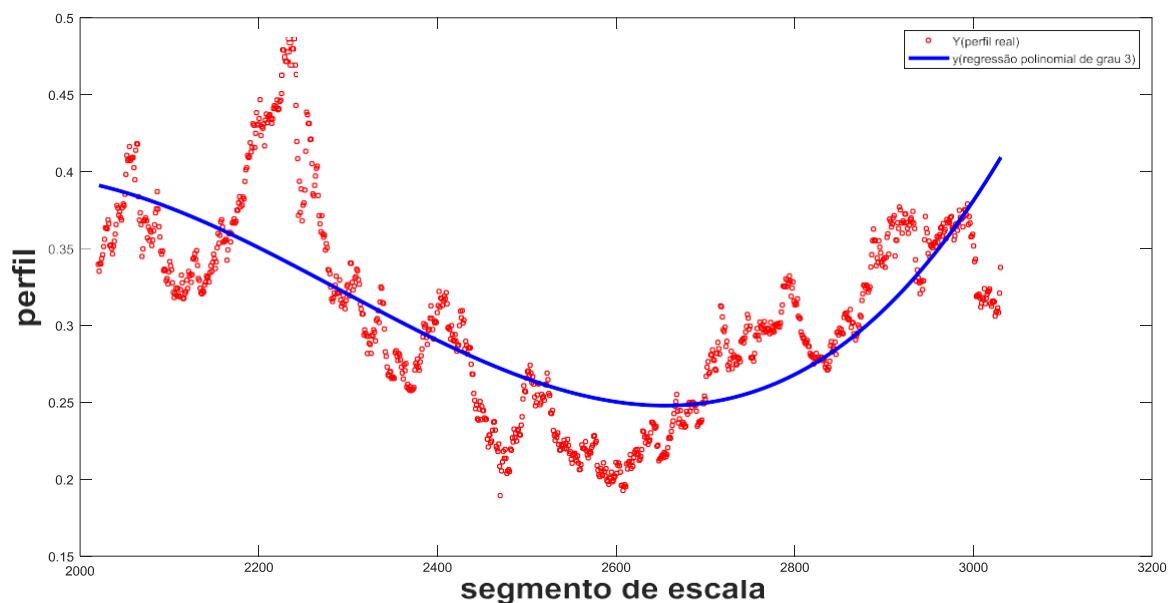


Figura 41: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 1010 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 3 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

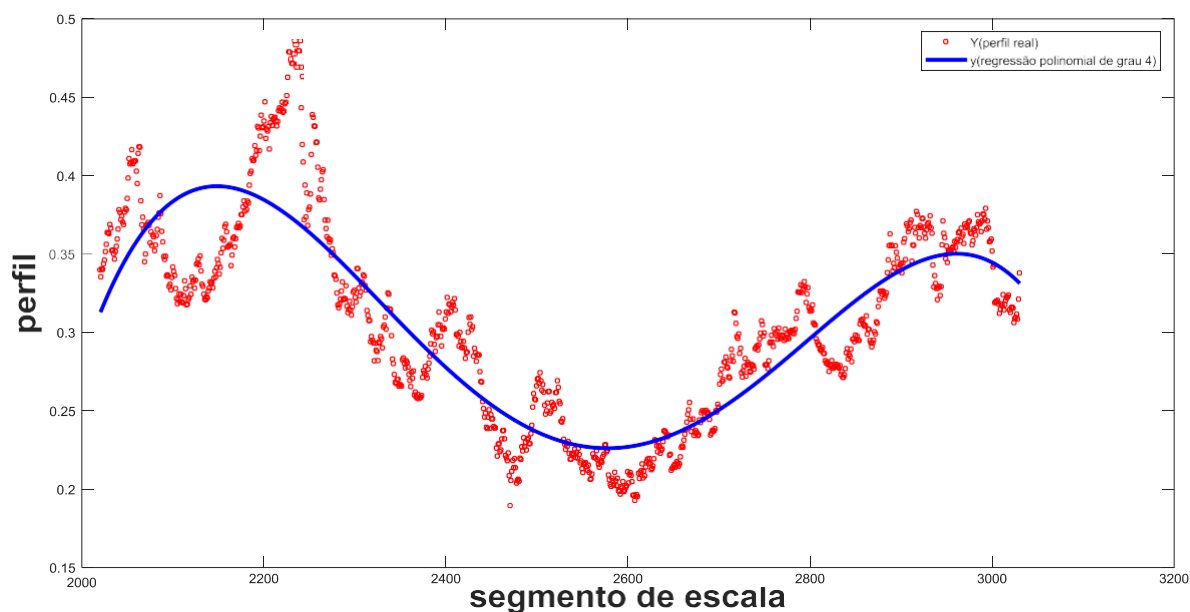


Figura 42: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 1010 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 4 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

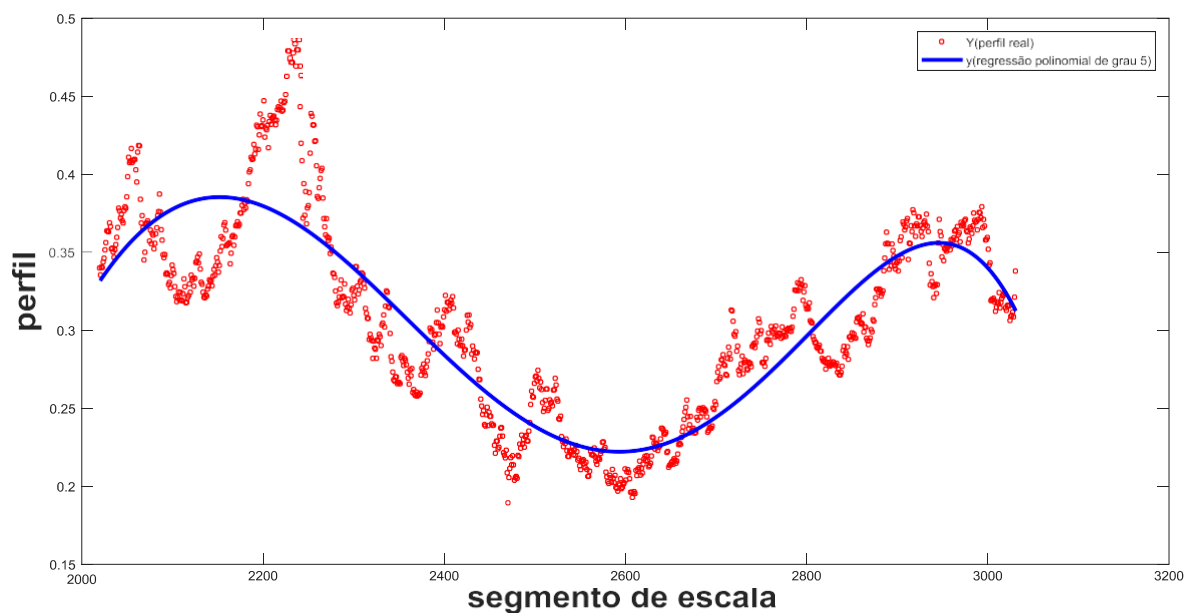


Figura 43: Gráfico da distribuição do perfil da série (pontos vermelhos) com o terceiro segmento de escala de 1010 valores, juntamente com o gráfico da regressão polinomial de grau 5 dessa série.

Fonte: Produzida pelo autor.

Os resultados que nos interessam são, particularmente, dois: (i) o grau de multifractalidade ΔH_q e (ii) o grau de multifractalidade Δh_q , já que são os seus valores que indicam a possível presença de um comportamento multifractal (IHLEN, 2012). Nas figuras que se seguem, exibimos, para cada série, dois gráficos, um para cada grau de multifractalidade. Os valores destes graus de multifractalidade foram calculados para polinômios de regressão para retirar a tendência y_v (estes polinômios são os que estão colocados nas equações 4 e 5 do passo 3 do método MFDFA, descrito na seção 4) de graus $m = 1, 2, 3, 4$ e 5 (valores, estes, colocados no eixo das abscissas). Usualmente, a literatura da área usa o grau $m = 1$.

- Ações brasileiras

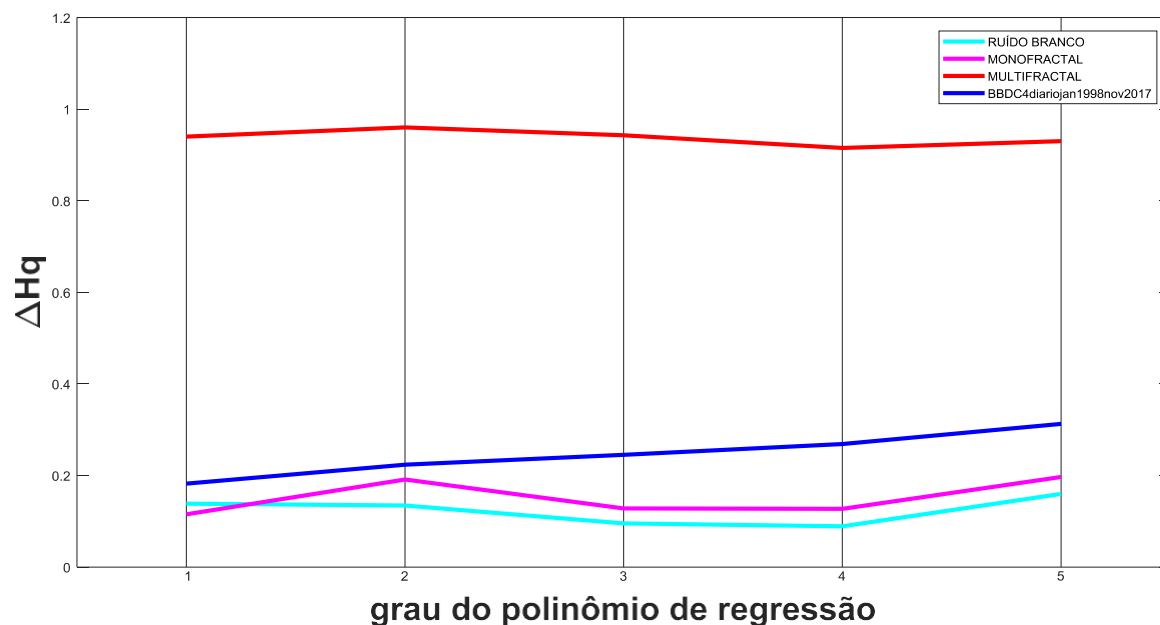


Figura 44: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e BBDC4.

Fonte: Produzida pelo autor.

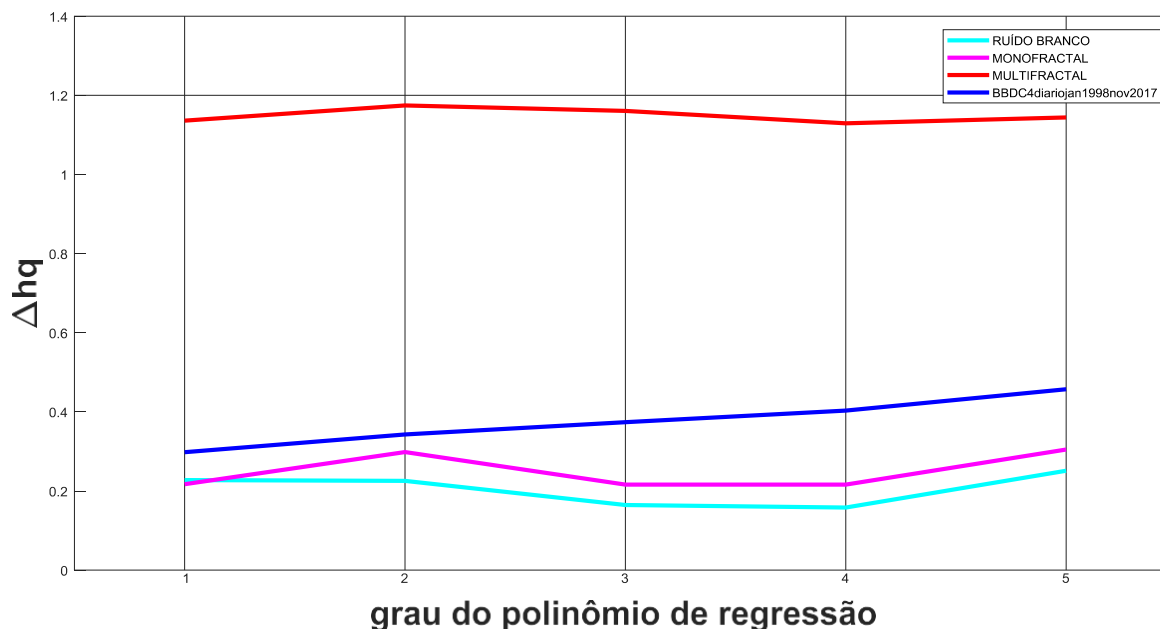


Figura 45: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e BBDC4.

Fonte: Produzida pelo autor.

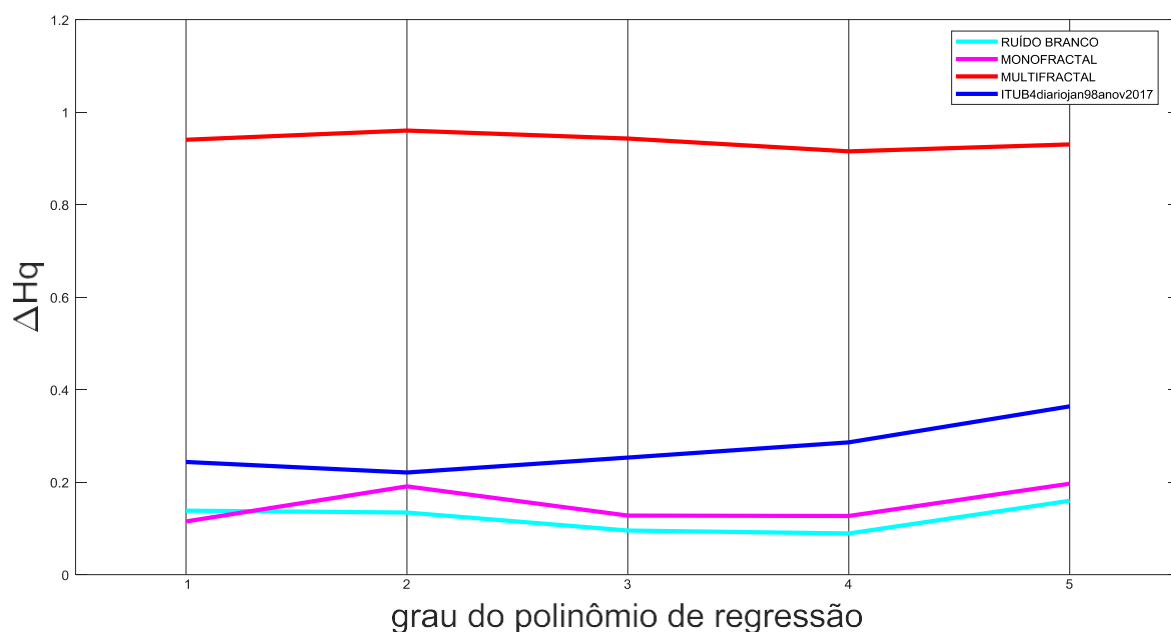


Figura 46: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e ITUB4.

Fonte: Produzida pelo autor.

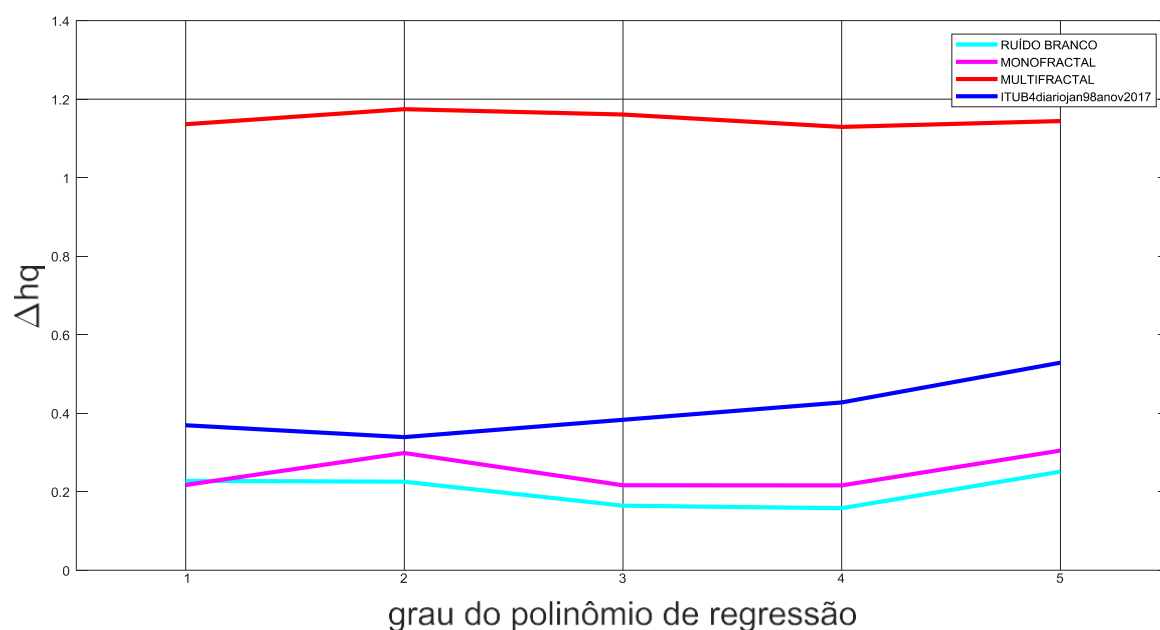


Figura 47: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e ITUB4.

Fonte: Produzida pelo autor.

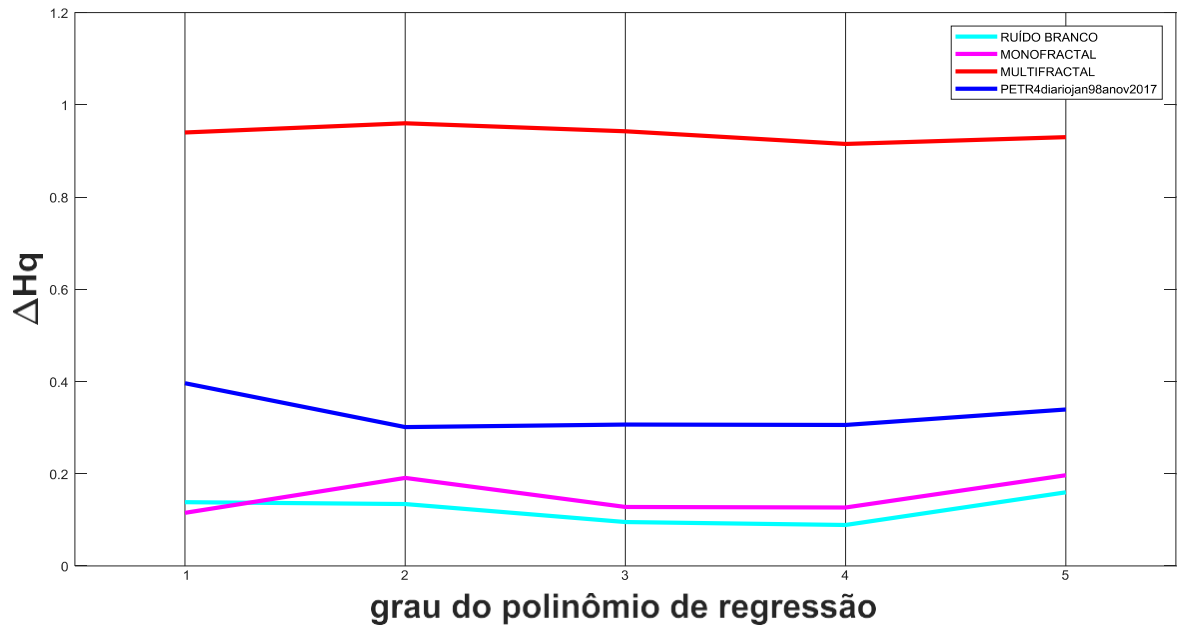


Figura 48: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e PETR4.

Fonte: Produzida pelo autor.

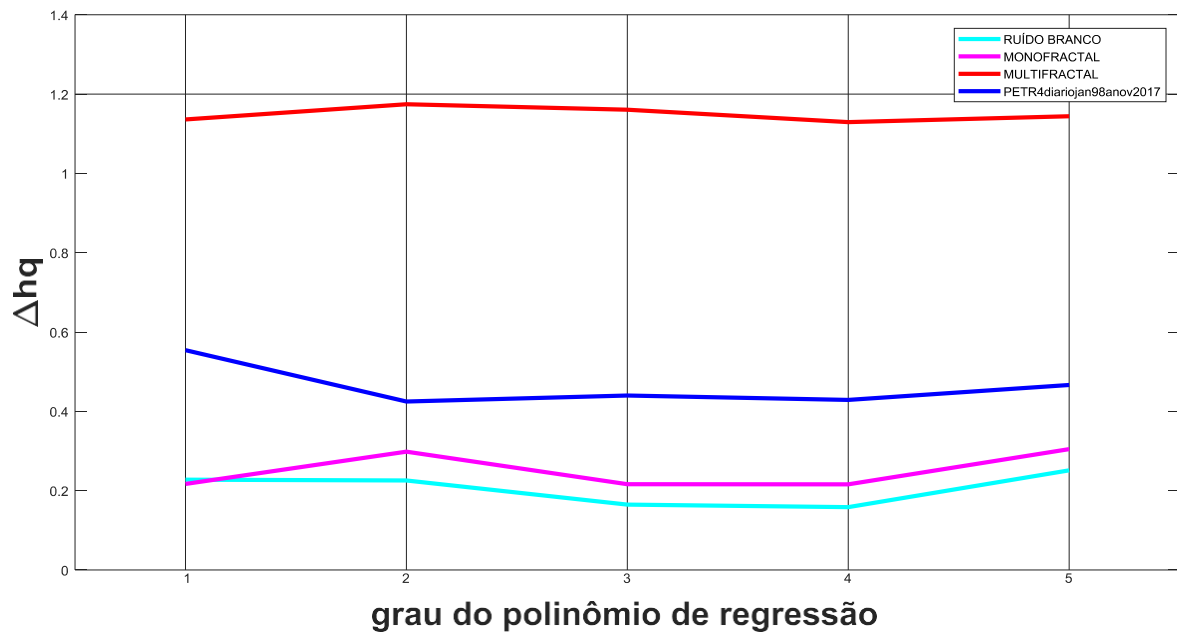


Figura 49: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e PETR4.

Fonte: Produzida pelo autor.

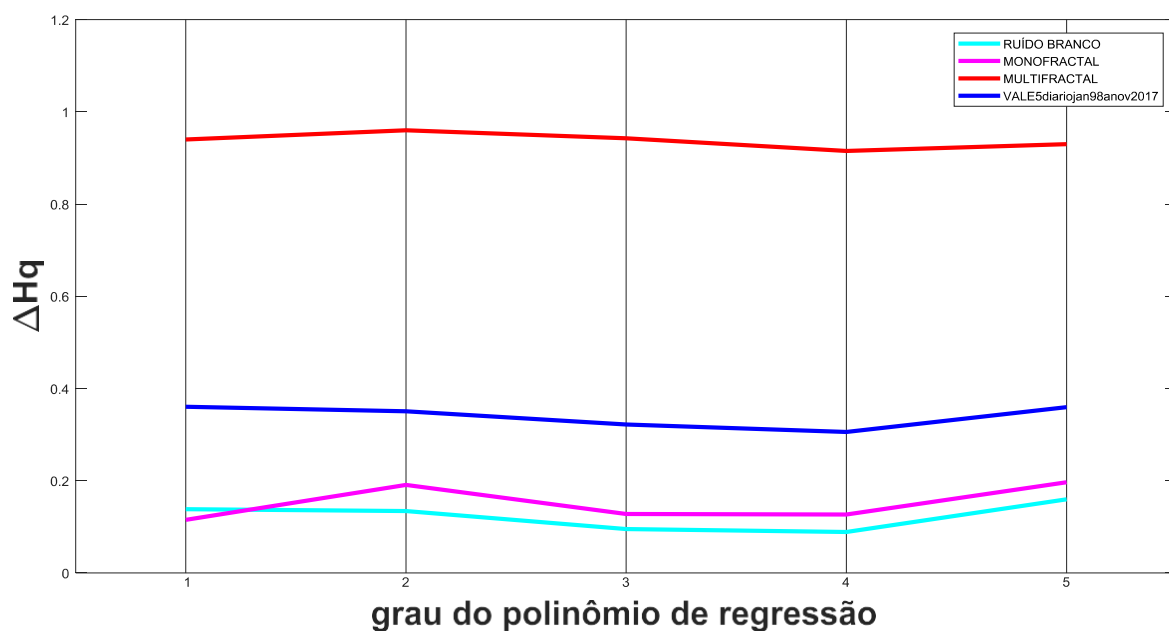


Figura 50: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e VALE3.

Fonte: Produzida pelo autor.

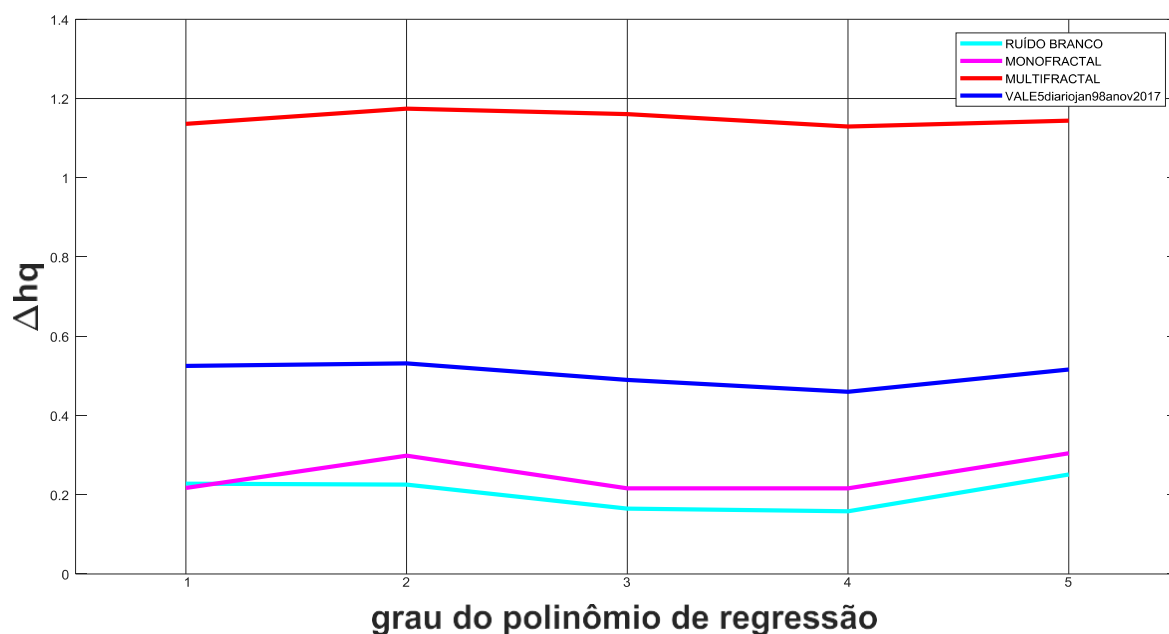


Figura 51: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e VALE3.

Fonte: Produzida pelo autor.

Bitcoin

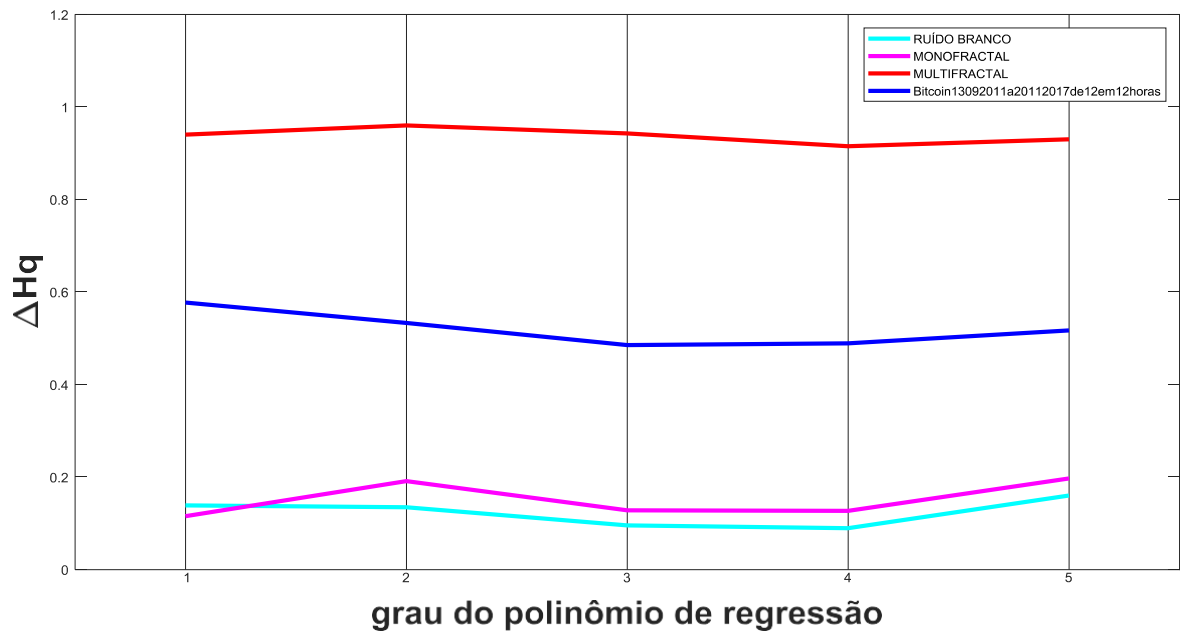


Figura 52: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Bitcoin.

Fonte: Produzida pelo autor.

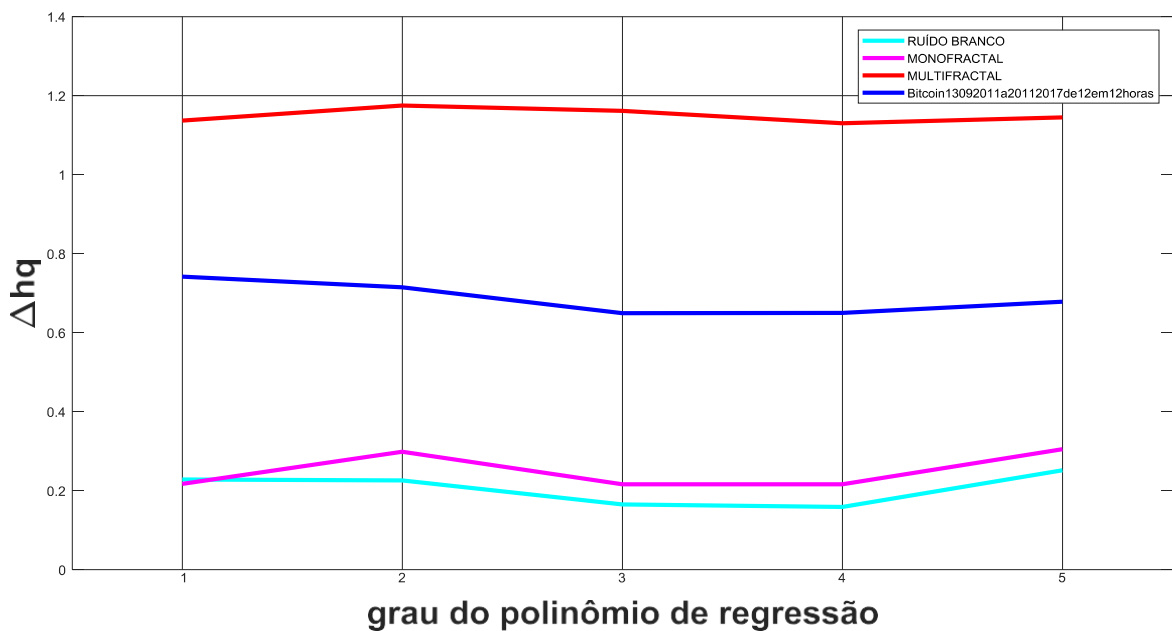


Figura 53: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Bitcoin.

Fonte: Produzida pelo autor.

Bolsas Internacionais e a principal Nacional

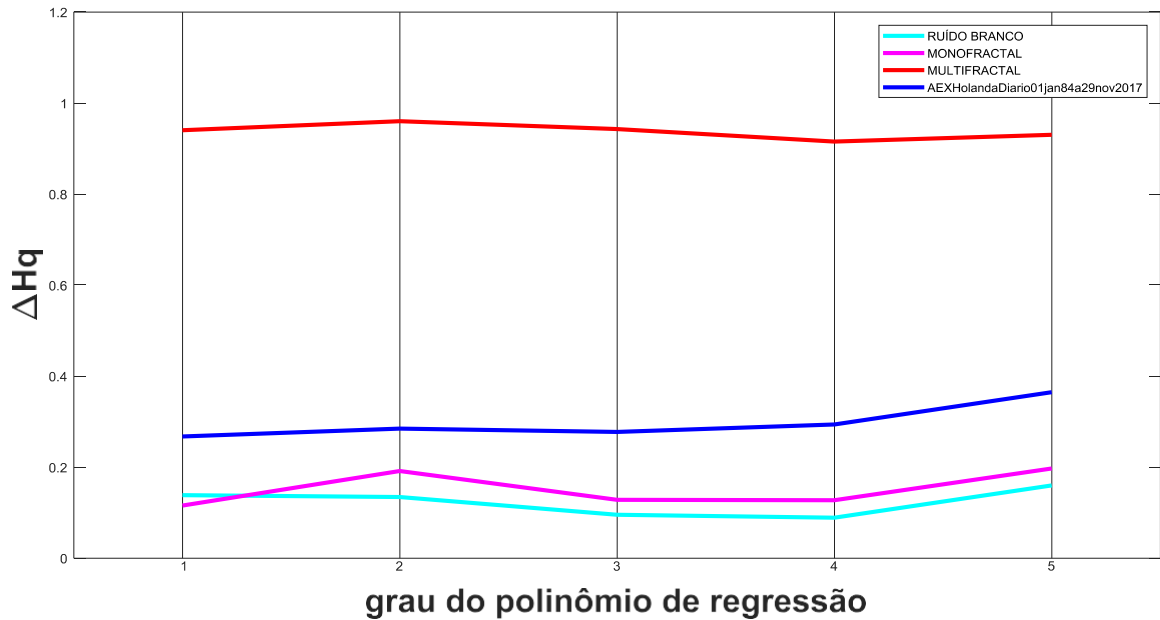


Figura 54: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e AEX.

Fonte: Produzida pelo autor.

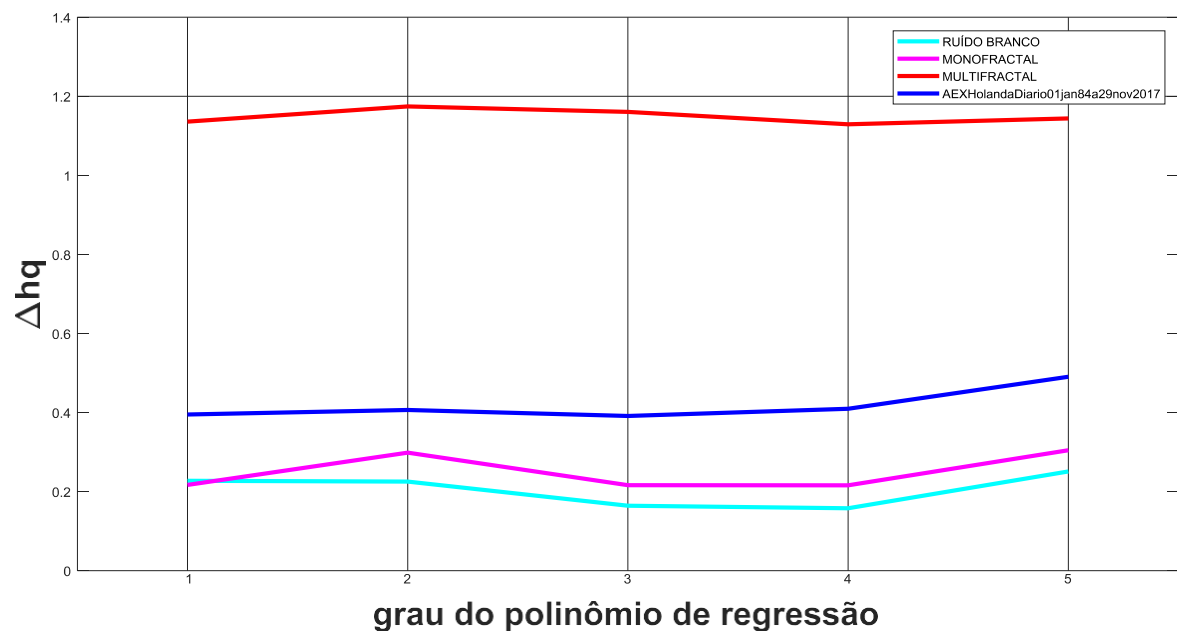


Figura 55: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e AEX.

AEX.

Fonte: Produzida pelo autor.

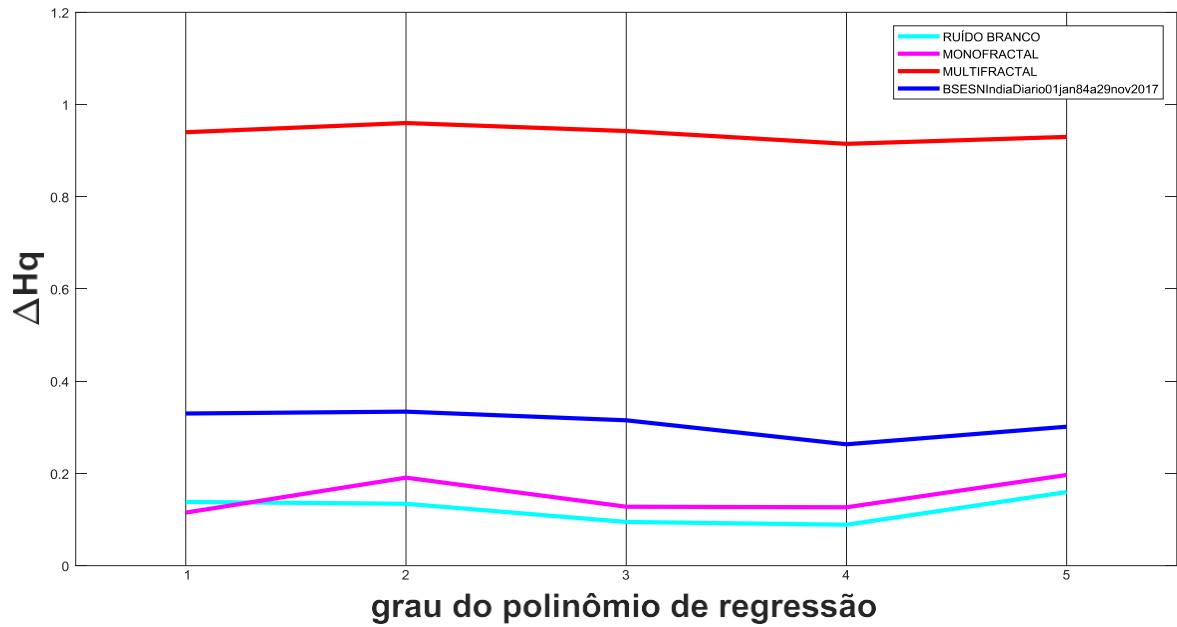


Figura 56: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e BSESN.

Fonte: Produzida pelo autor.

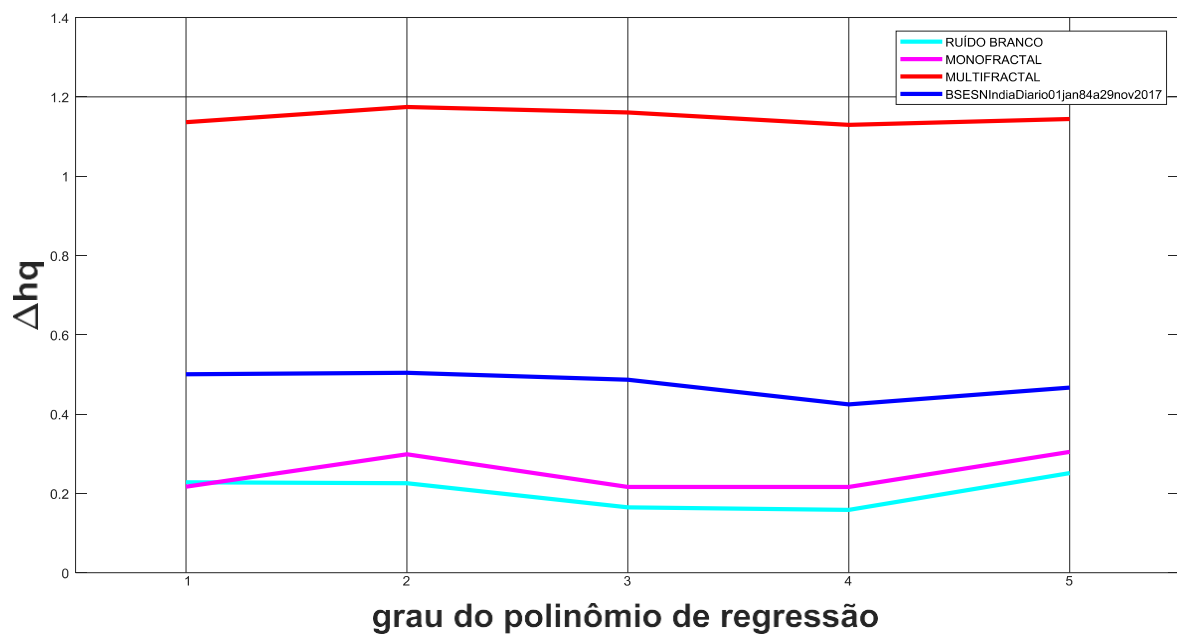


Figura 57: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e BSESN.

Fonte: Produzida pelo autor.

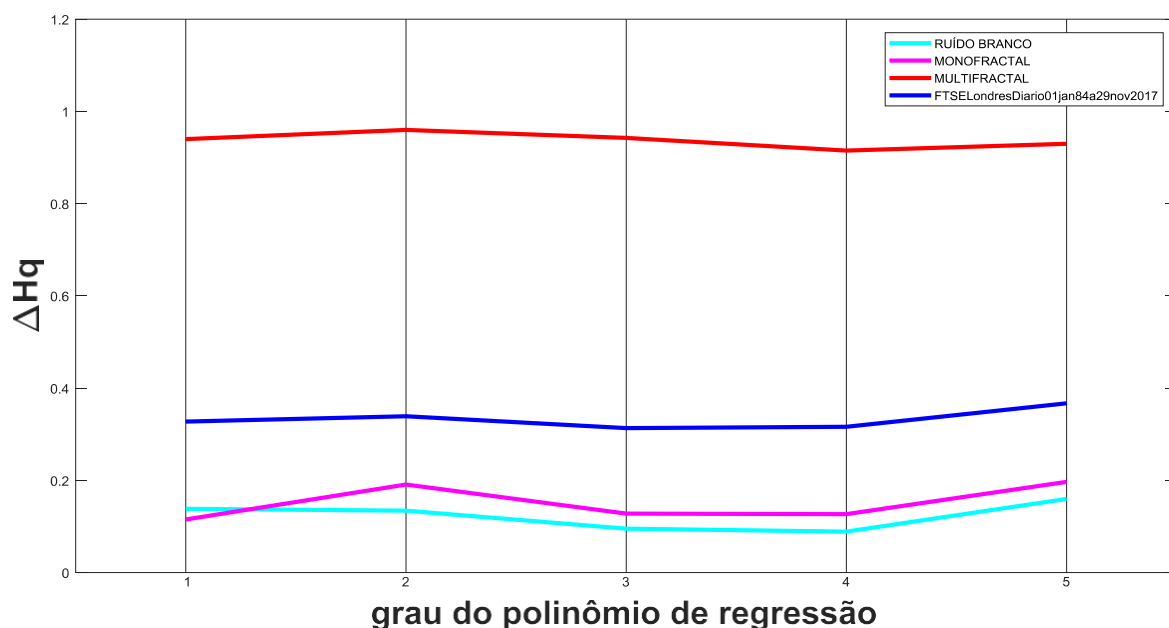


Figura 58: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e FTSE.

Fonte: Produzida pelo autor.

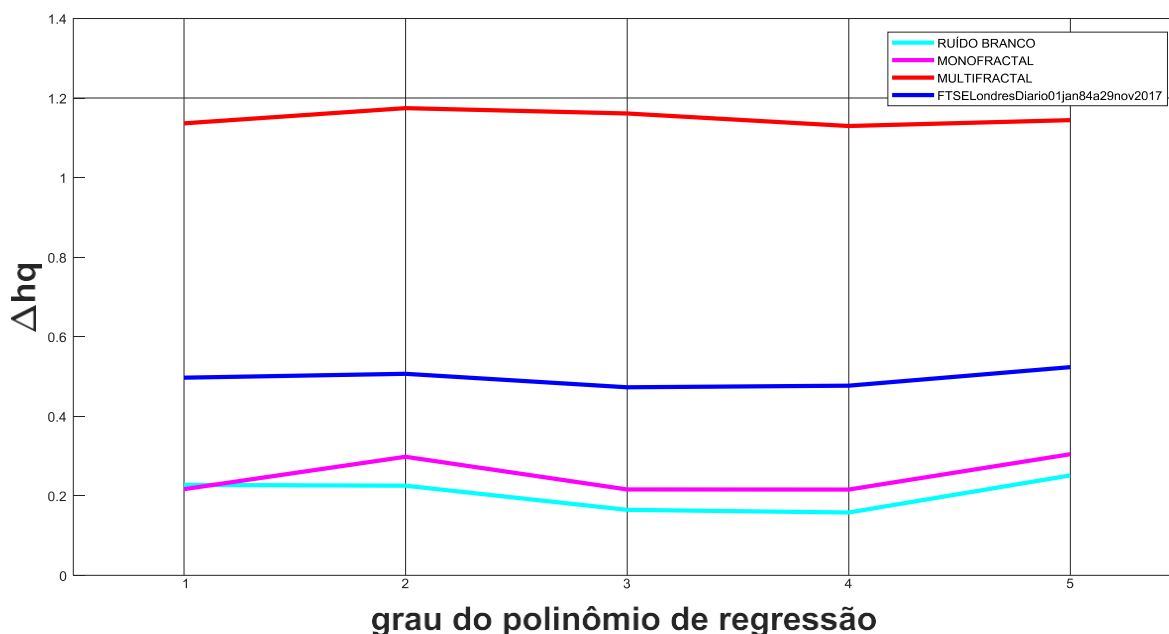


Figura 59: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e FTSE.

Fonte: Produzida pelo autor.

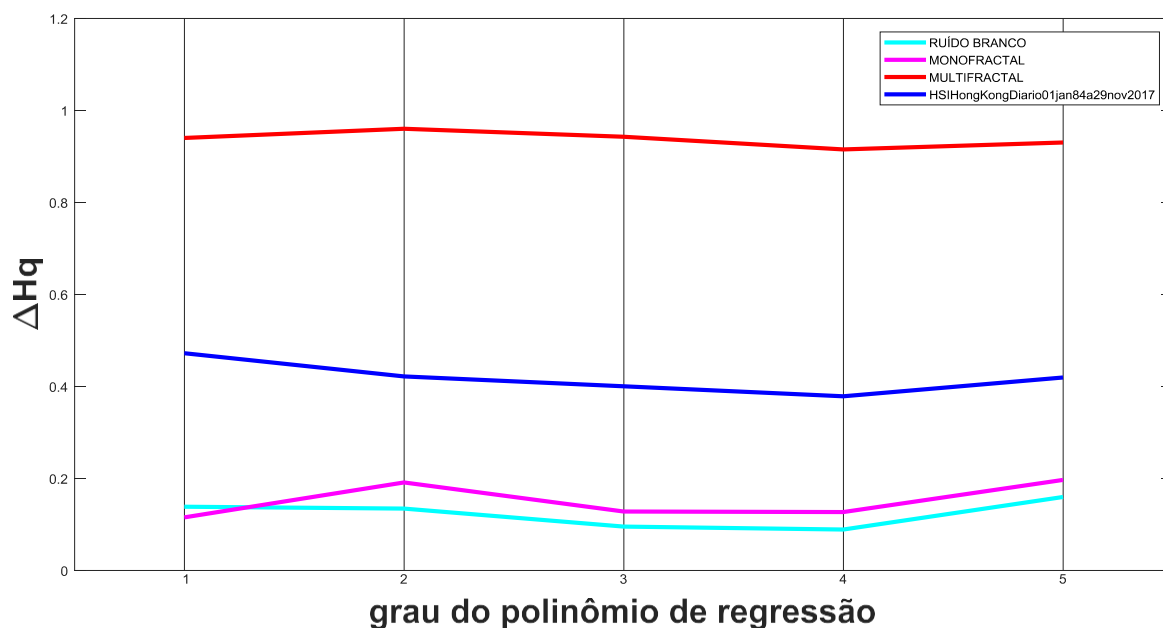


Figura 60: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e HSI.

Fonte: Produzida pelo autor.

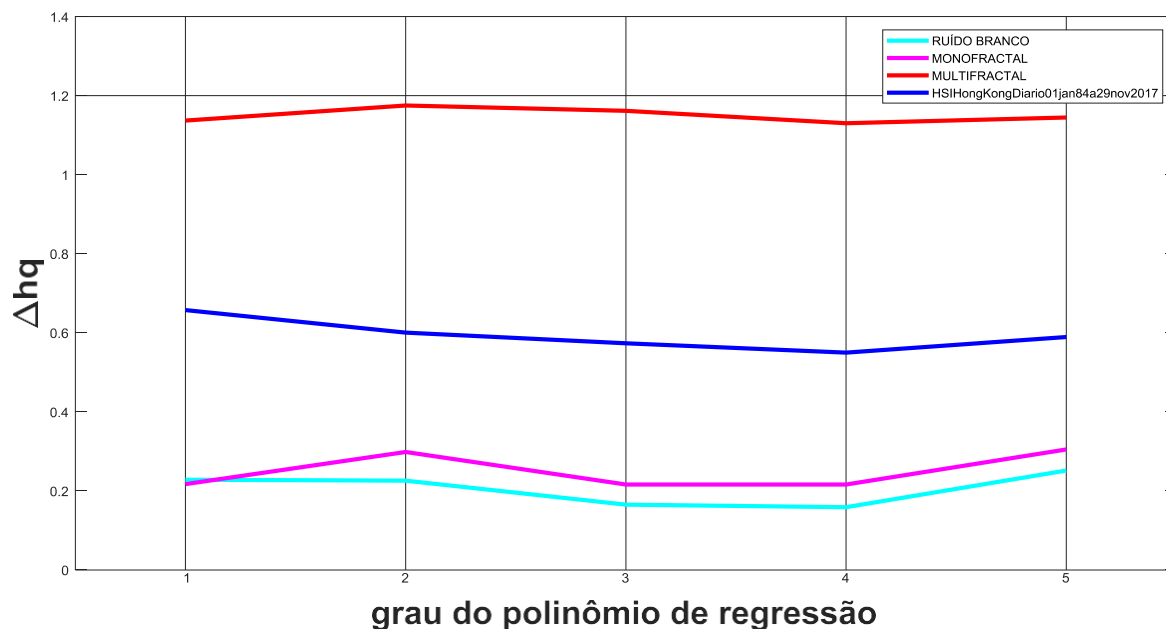


Figura 61: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e HSI.

Fonte: Produzida pelo autor.

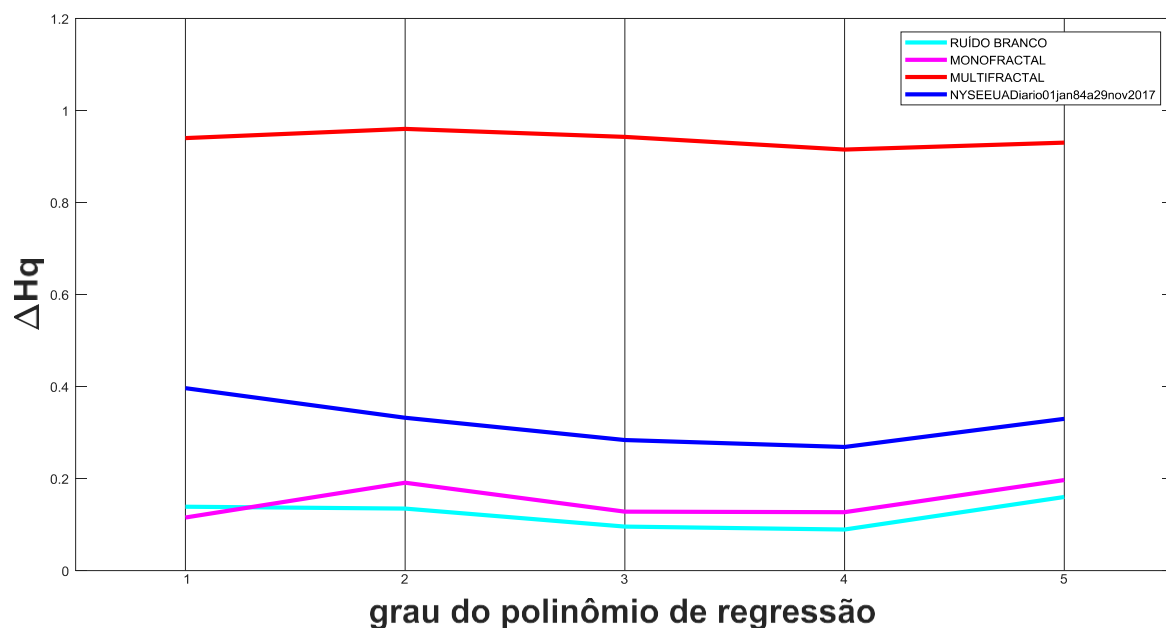


Figura 62: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e NYSE.

Fonte: Produzida pelo autor.

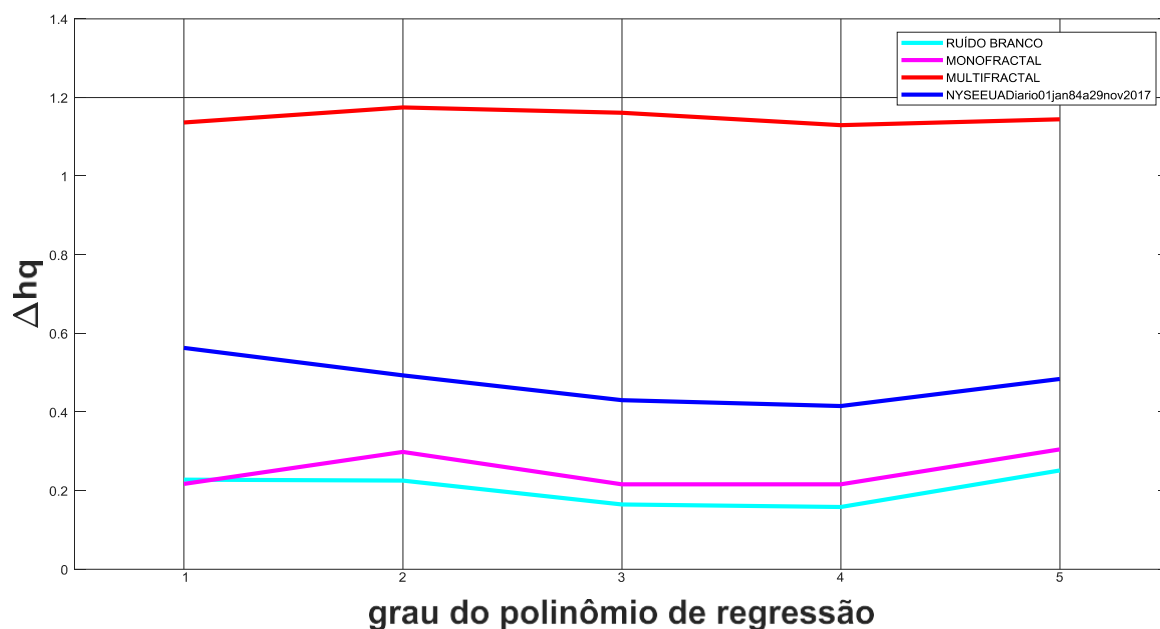


Figura 63: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e NYSE.

Fonte: Produzida pelo autor.

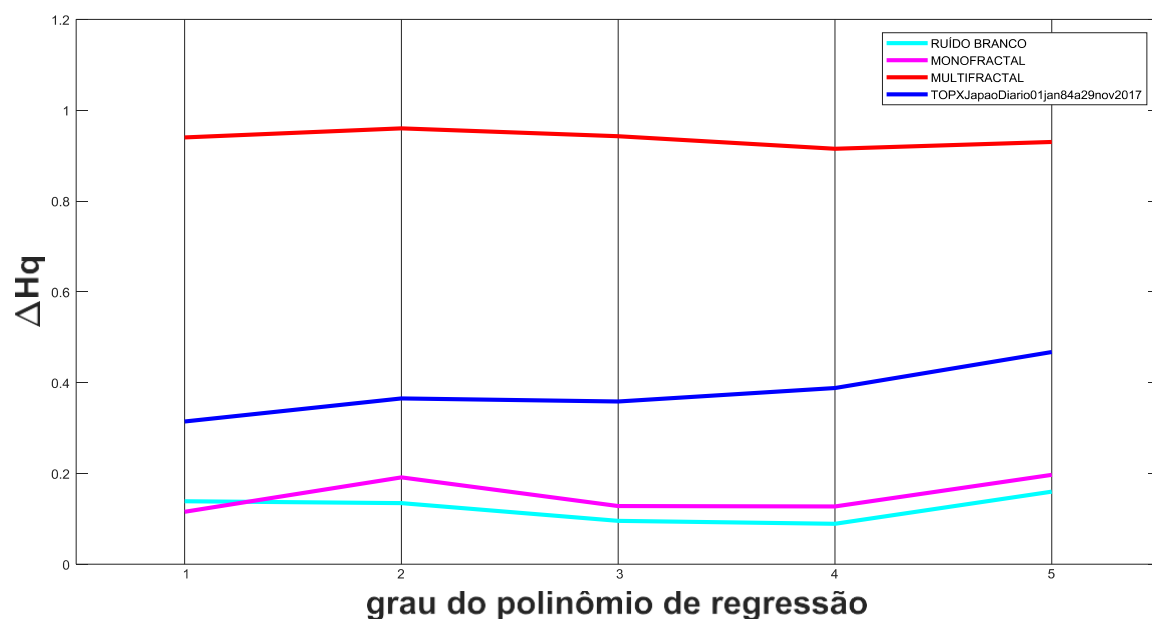


Figura 64: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e TOPX.

Fonte: Produzida pelo autor.

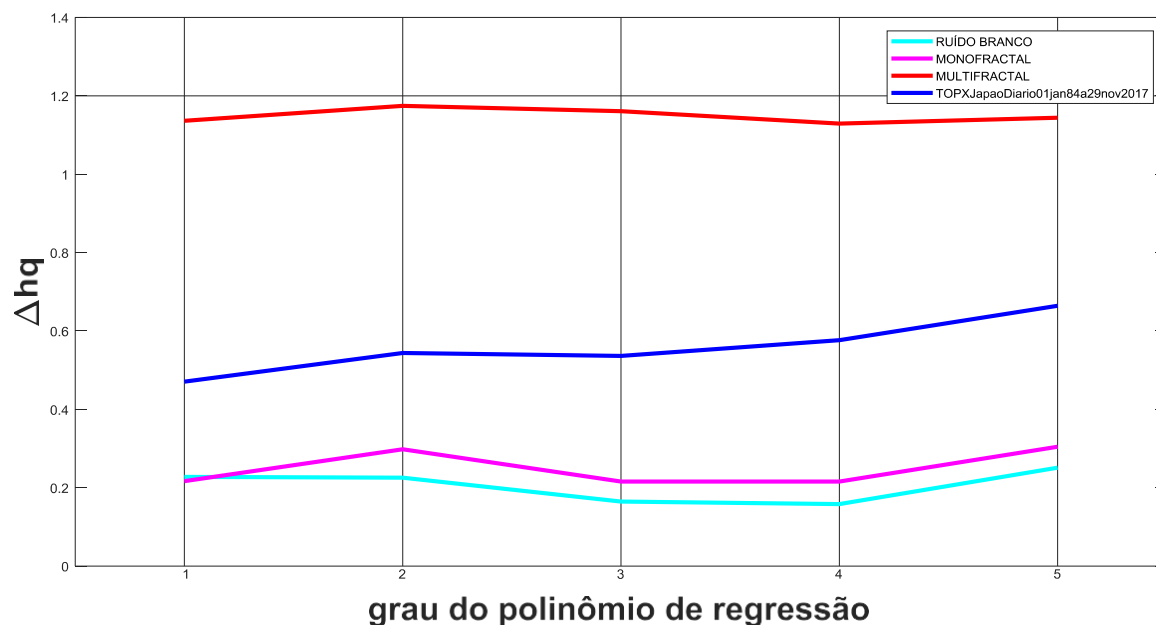


Figura 65: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e TOPX.

Fonte: Produzida pelo autor.

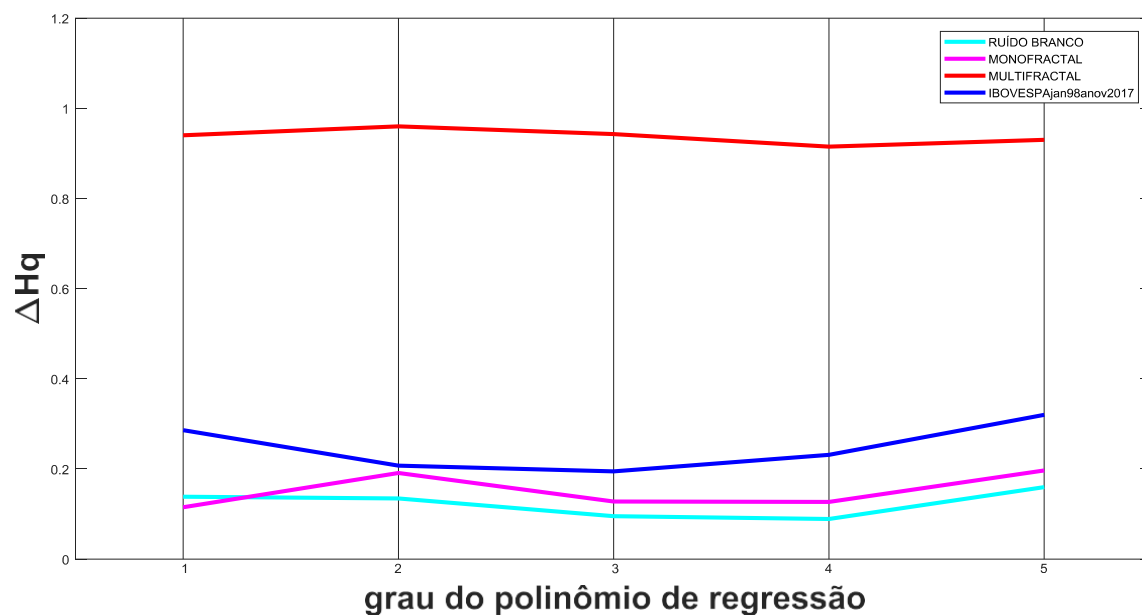


Figura 66: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio IBOVESPA.

Fonte: Produzida pelo autor.

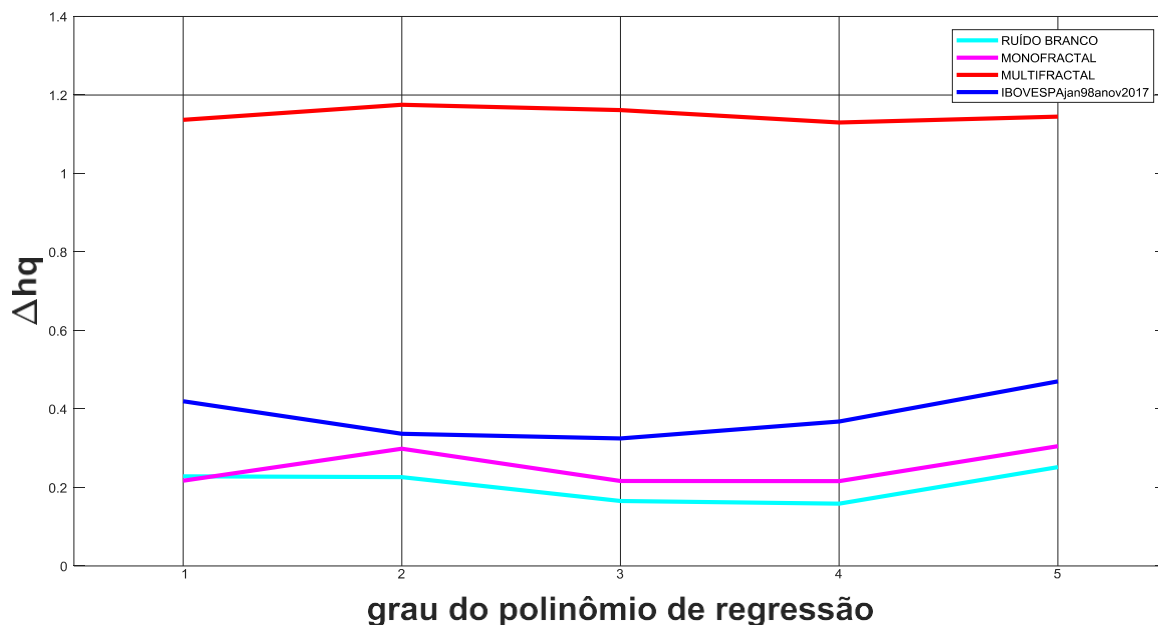


Figura 67: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio IBOVESPA.

Fonte: Produzida pelo autor.

- Taxas de Câmbio

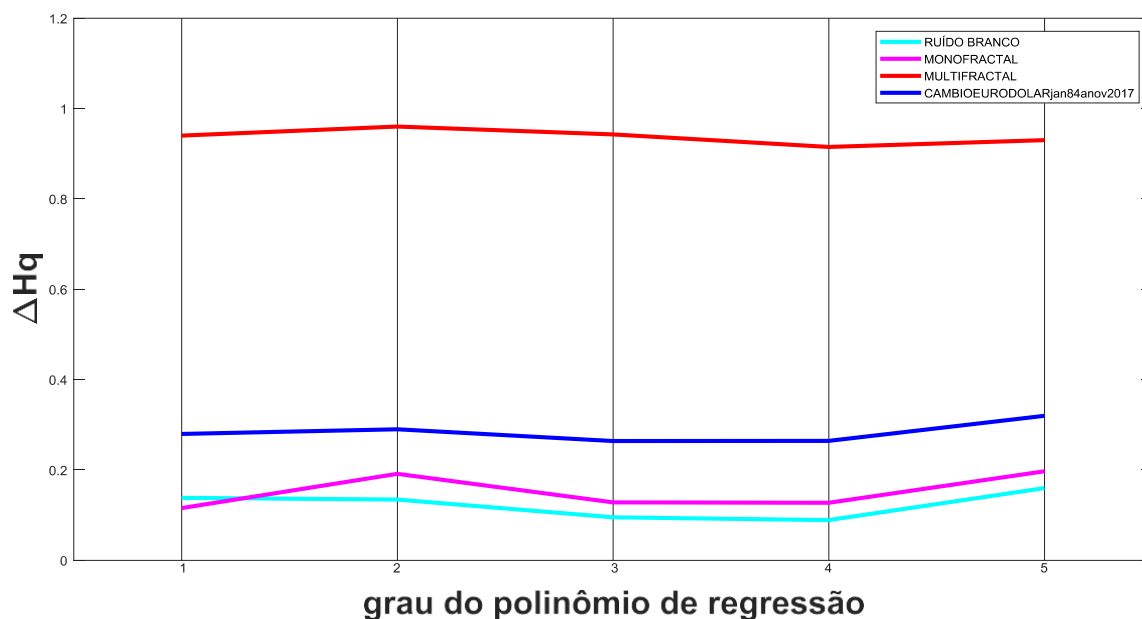


Figura 68: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Euro-Dólar.

Fonte: Produzida pelo autor.

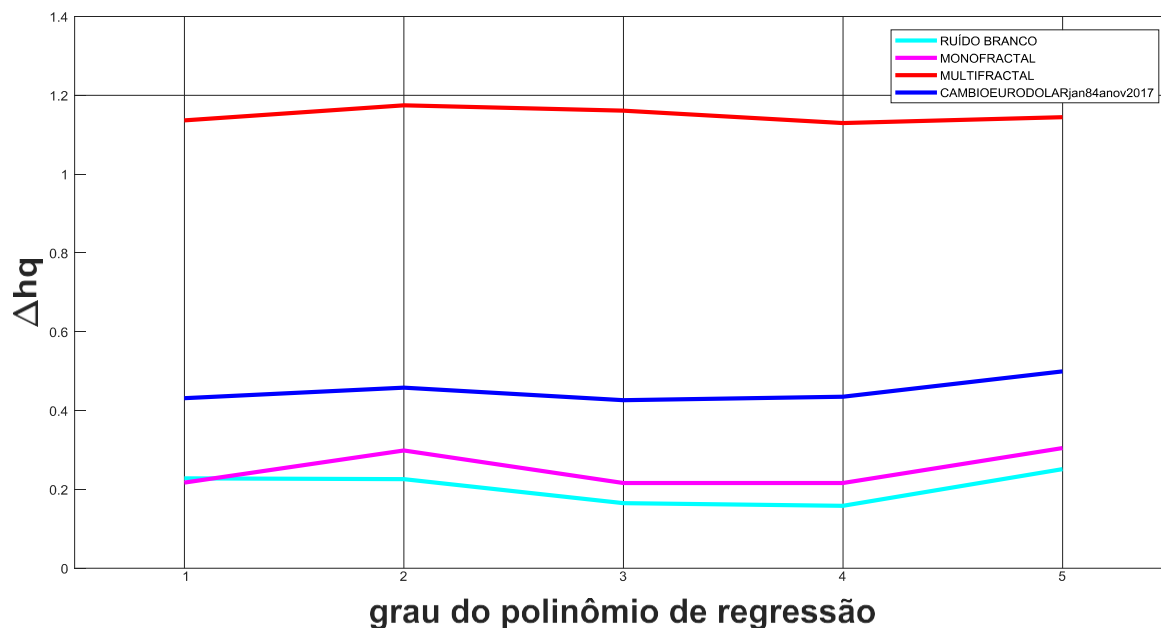


Figura 69: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Euro-Dólar.

Fonte: Produzida pelo autor.

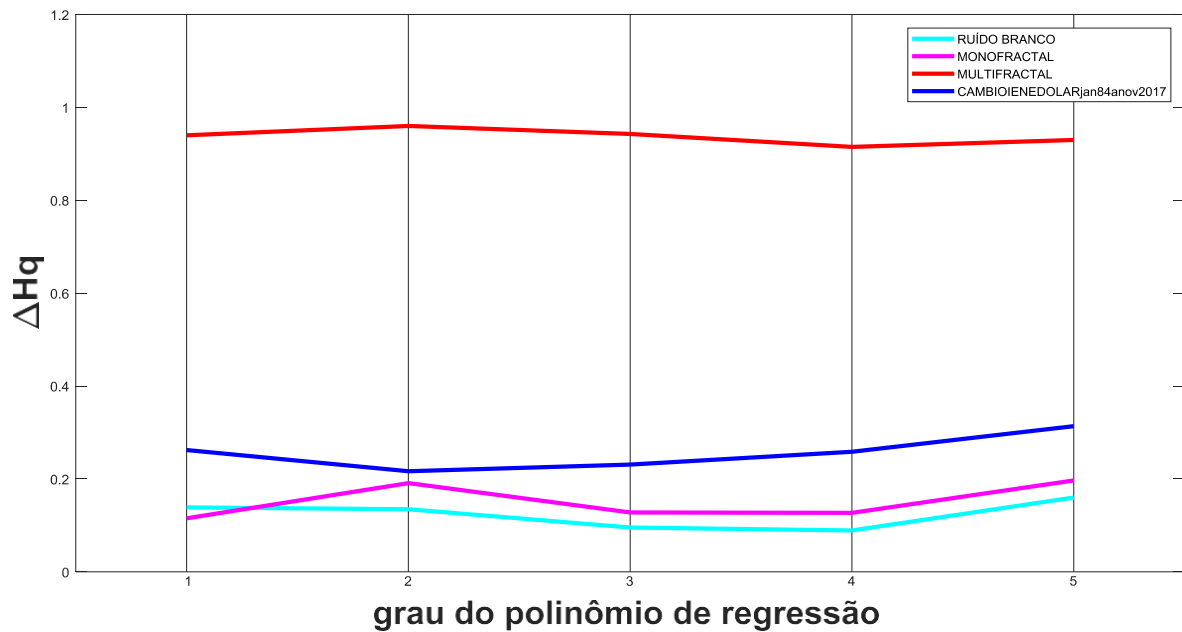


Figura 70: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Iene-Dolar.

Fonte: Produzida pelo autor.

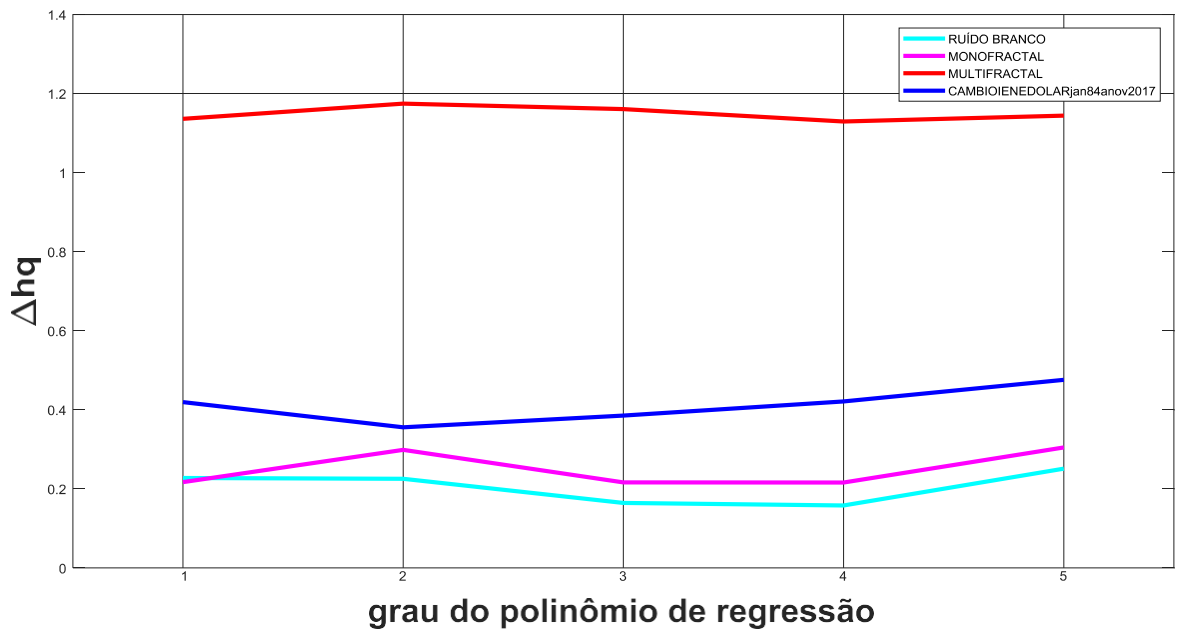


Figura 71: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Iene-Dolar.

Fonte: Produzida pelo autor.

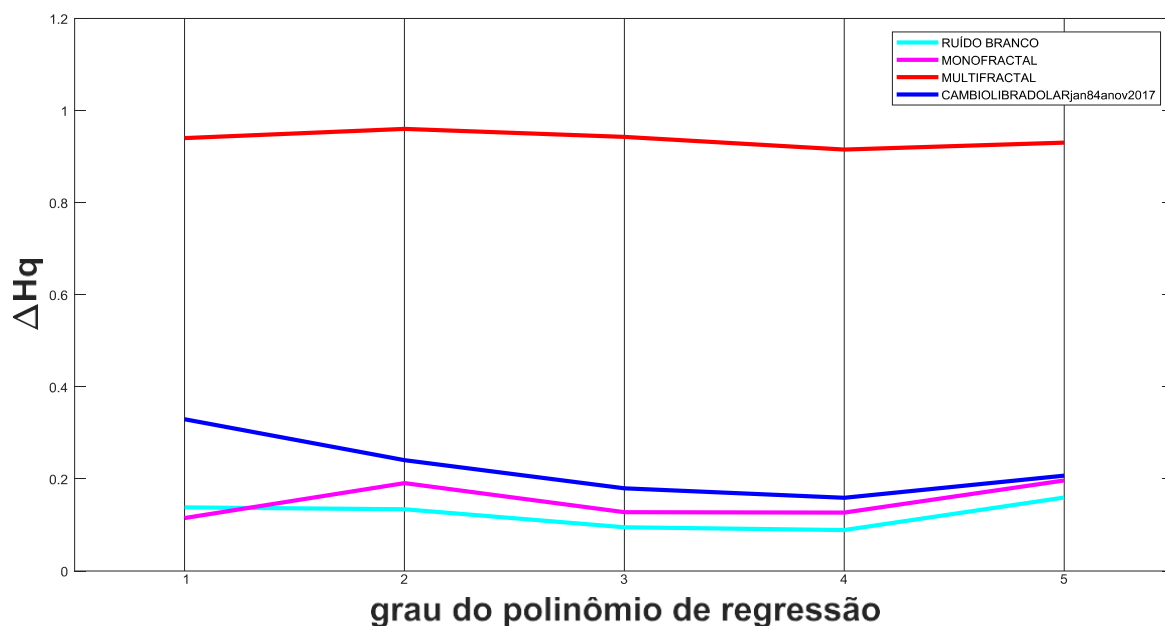


Figura 72: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Libra-Dólar.

Fonte: Produzida pelo autor.

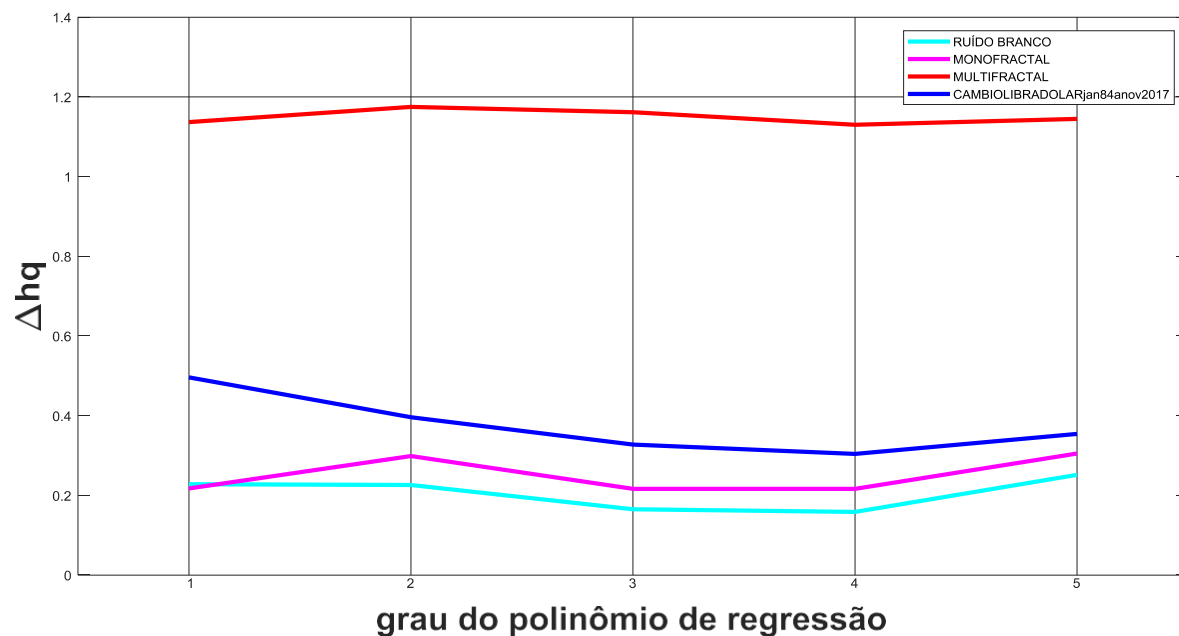


Figura 73: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Libra-Dólar.

Fonte: Produzida pelo autor.

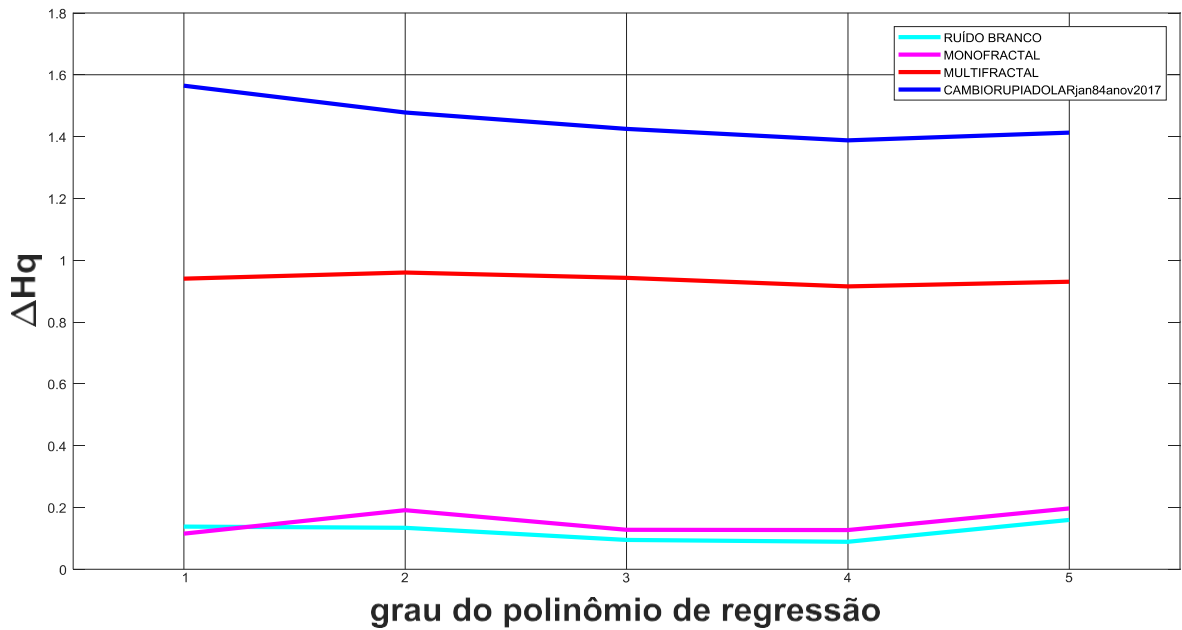


Figura 74: Gráfico do grau de multifractalidade ΔHq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Rupia-Dolar.

Fonte: Produzida pelo autor.

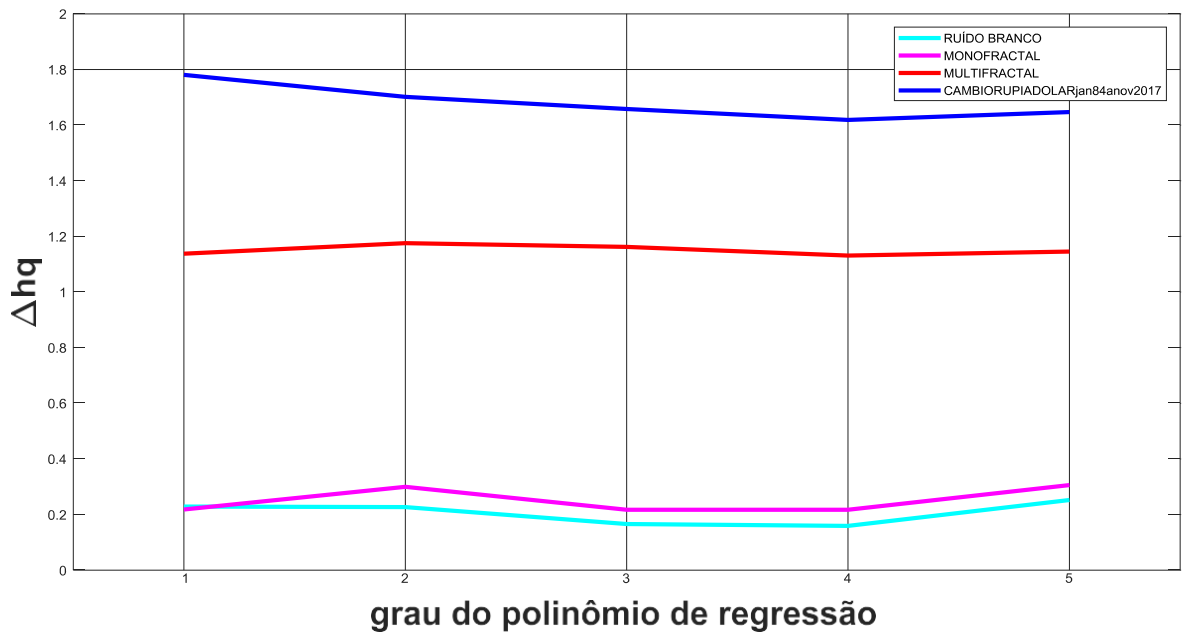


Figura 75: Gráfico do grau de multifractalidade Δhq , com os resultados obtidos a partir da variação do grau do polinômio de regressão nas séries temporais Ruído Branco, Monofractal, Multifractal e Câmbio Rupia-Dolar.

Fonte: Produzida pelo autor.

Todas essas séries exibem um comportamento multifractal, embora de baixa intensidade, no geral. Mas a observação desta “intensidade” multifractal não fica nem prejudicada nem facilitada ao se considerarem os diferentes graus dos polinômios de regressão usados. Em cada caso, a consideração sobre a existência ou não de multifractalidade, bem como quão multifractal uma dada série é, será obtida igualmente para qualquer grau de regressão utilizado.

6 CONCLUSÃO

A conclusão deste trabalho é simples e direta: como não há vantagem qualitativa ou quantitativa ao se usarem polinômios de regressão de graus maiores do que um para séries financeiras, recomenda-se a utilização dos polinômios de grau um (lineares), de acordo com o princípio de simplicidade e rapidez nos cálculos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrimo a geometria Fractal – para sala de aula*. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005. 156 p.

BENBACHIR, S. & ALAOUI, M. E. A multifractal detrended fluctuation analysis of the Moroccan stock exchange. *International Research Journal of Finance and Economics*, v. 78, p. 6-15, 2011.

CAJUEIRO, D. O., GOGAS, P., TABAK, B. M. Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. *International Review of Financial Analysis*, v. 18, p. 50-57, 2009.

CAO, G. & XU, W. Multifractal features of EUA and CER futures markets by using multifractal detrended fluctuation analysis based on empirical model decomposition. *Chaos, Solution and Fractals*, v.83, p.212-222, 2016.

CZARNECKI, L. & GRECH, D. Multifractal dynamics of stock markets. *Acta Physica Polonica A*, v. 117, p.623-629, 2010.

DA SILVA FILHO; MAGANINI, N. D.; ALMEIDA, E. F. *Multifractal Analysis of Bitcoin Market*. *Physica A*, v. 512, p. 954-967, 2018.

DUTTA, S. Multifractal detrended fluctuation analysis of SENSEX fluctuation in the Indian Stock Market. *Canadian Journal of Physics*, v. 88, p. 545-551, 2010.

DUTTA, S., GHOSH, D., & CHATTERJEE, S. Multifractal detrended cross correlation analysis of foreign exchange and SENSEX fluctuation in Indian perspective. *Physica A*, v. 463, p. 188-201, 2016.

HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. *Matlab 6 – Curso Completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 676 p.

IHLEN, E. A. F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MatLab. *Frontiers in Physiology*, v. 3, p. 1-18, 2012.

KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, v. 316, p. 87-114, 2002.

LUX, T., MORALES-ARIAS, L. & SATTARHOFF, C. Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, v. 33, p. 532-541, 2014.

MAGANINI, N. D., SILVA FILHO, A. C. e LIMA, F. G. Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. *Physica A*, v. 497, p. 458-471, 2018.

MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman, 1977.

MANDELBROT, B. *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk*. New Haven: Springer. 1997.

MANTEGNA, R. N & STANLEY, H. E. Turbulence and financial markets. *Nature*, v. 383, p. 587-588, 1996.

MATIA, K., ASHKENAZY, Y. & STANLEY, H. E. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *Europhysics Letters*, v. 61, p. 422-428, 2003.

NOROUZZADEH, P. & JAFARI, G. R. Application of multifractal measures to Tehran price index. *Physica A*, v. 356, p. 609-627, 2005.

RABAY, Yara Silvia Freire. *Estudo e aplicações da geometria Fratal*. 2013, 89 f. (Dissertação de mestrado profissional em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

REGÔ, Celso Ricardo Caldeira. *Multifractalidade dos rios brasileiros*. 2012, 86 f. (Dissertação em Física). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2012.

STOSIC, I., SILVA, J. R. S. & STOSIC, T. Multifractal analysis of pegged and floating Dollar-Real Exchange rates. CMAC, Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, (2012).

SU, Z. Y.; WANG, Y. T. & HUANG, H. Y. A multifractal detrended fluctuation analysis of Taiwan's stock exchange. *Journal of the Korean Physical Society*, v. 54, p. 1395-1402, 2009.

VANDEWALLE, N. & AUSLOOS, M. Sparseness and roughness of foreign exchange rates. *International Journal of Modern Physics C*, v.9, n.5, p. 711-719, 1998.

WANG, Y., WU, C. & PAN, Z. Multifractal detrending moving average analysis on the US Dollar exchange rates. *Physica A*, v.390, p. 3512-3523, 2011.

YING, Y.; XIN-TIAN, Z.; XIU, J. Measuring multifractality of stock price fluctuation using multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A*, v. 388, p. 2189-2197. 2009.

ZUNINO, L., FIGLIOLA, A., TABAK, B. M., PÉREZ, D. G., GARAVAGLIA, M. &

ROSSO, O. A. Multifractal structure in Latin-American market indices. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 41, p. 2331-2340, 2009.