

## **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E O CRESCIMENTO POPULACIONAL: uma comparação entre a curva de Gompertz e o modelo Logístico**

Francine Bonato de Souza  
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF  
franbonato@live.com

Antônio Carlos da Silva Filho  
Doutor em Ciência e Docente do Uni-FACEF  
acdassf@bol.com.br

### **RESUMO**

A modelagem matemática é de suma importância para o desenvolvimento da sociedade e as equações diferenciais são uma das ferramentas matemáticas utilizadas para a construção de modelos científicos. Grande parte dos avanços tecnológicos atuais se dão por conta das equações diferenciais e uma das suas aplicações é a modelagem do crescimento de populações. Sua aplicação em crescimento de populações teve início no ano de 1798 com o trabalho “An essay on the Principle of populations” do matemático inglês Thomas Robert Malthus, onde ele propôs que a taxa de crescimento de uma pequena população era proporcional ao seu tamanho. Tal modelo apresentava uma solução onde a população cresceria de maneira exponencial, o que não é condizente com a realidade, visto que há fatores - disponibilidade de alimentos, espaço, doenças, entre outros – que impossibilitam tal crescimento. Uma correção ao modelo de Malthus foi apresentada pelo matemático Pierre-François Verhulst no ano de 1838. Ele alterou a constante do modelo de Malthus, modificando-a a fim de fazer com que ela diminuísse à medida que a população crescia, subtraindo da constante um termo proporcional ao tamanho da população. Tal modelo foi nomeado por Verhulst de Modelo Logístico. Também no ano de 1838, o matemático Benjamin Gompertz apresentou um modelo onde a correção à taxa de crescimento é proporcional não ao tamanho da população, mas ao logaritmo deste tamanho. Este modelo é muito aplicado à modelagem do crescimento de tumores, sendo as soluções nomeadas curvas de Gompertz. O principal objetivo desse trabalho é apresentar o modelo Logístico e o modelo de Gompertz através de uma dedução analítica geral do comportamento das suas soluções e compará-las graficamente a fim de evidenciar as similaridades e as diferenças entre eles.

**Palavras-chave:** Modelo Logístico. Curva de Gompertz. Comparação. Equações diferenciais.

## ABSTRACT

Mathematical modeling is of capital importance for the development of society and differential equations are one of the mathematical tools used to construct scientific models. Much of today's technological advances are due to differential equations and one of their applications is modeling population growth. Its application to population growth began in 1798 with the work "An essay on the Principle of Populations" by English mathematician Thomas Robert Malthus, where he proposed that the growth rate of a small population was proportional to its size. Such model presented a solution where the population would grow exponentially, which is not consistent with reality, since there are factors - availability of food, space, diseases, among others - that make such growth impossible. A correction to the Malthus model was presented by the mathematician Pierre-François Verhulst in the year 1838. He altered the constant of the Malthus model, modifying it to make it decrease as the population grew, subtracting from the constant a term proportional to the size of the population. Such a model was named by Verhulst as Logistic Model. Also in the year 1838, the mathematician Benjamin Gompertz presented a model where the correction to the growth rate is proportional not to the population size, but to the logarithm of this size. This model is widely applied to tumor growth modeling, with solutions being named Gompertz curves. The main goal of this work is to present the Logistic model and the Gompertz model through a general analytical deduction of the behavior of their solutions and to compare them graphically in order to highlight the similarities and differences between them.

**Keywords:** Logistic model. Gompertz curve. Comparison. Differential equations.

## 1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais, conforme o próprio nome descreve (ZILL E CULLEN, 2001, p.4), são equações em que estão envolvidas diferenciais de uma variável ou mais em relação a uma ou mais variáveis independentes. Tais equações possuem grande aplicação na modelagem de sistemas da natureza. Esses modelos são estudados na área de estudo de Sistemas Dinâmicos (MONTEIRO, 2002). Esta área estuda a evolução dos sistemas ao longo do tempo e inúmeros modelos matemáticos possuem como variável independente o tempo.

Entre as diversas aplicações encontradas para as equações diferenciais, este trabalho irá focar apenas nas aplicações envolvendo o estudo do crescimento de populações, em especial nos modelos desenvolvidos por Pierre-François Verhulst (1804 - 1849) e Benjamin Gompertz (1779 – 1865).

Este estudo busca analisar o comportamento das soluções dos

modelos dados a fim de descobrir se o sistema converge para um ponto fixo, se estabiliza-se em ciclos ou se apresenta comportamento caótico (TSONIS, 1992). Outra característica importante de tais modelos é a resposta rápida sobre a evolução do sistema pois há informações sobre o estado dos sistemas momentos anteriores e informações acerca do estado atual. Têm-se ainda que um Sistema Dinâmico é dito em equilíbrio quando, as forças contrárias que agem sobre ele encontram-se balanceadas e ele continua constante ou sem modificações. Um sistema é considerado estável quando, após a ação de forças contrárias, ele retorna ao seu ponto de equilíbrio anterior. Se o sistema retorna para seu equilíbrio apenas após pequenas perturbações ele é nomeado de localmente estável, mas, se ele retorna ao equilíbrio após qualquer perturbação, ele é chamado de globalmente estável. Caso o sistema não volte ao equilíbrio, ele é nomeado sistema caótico (MONTEIRO, 2002).

O crescimento de populações desperta interesse na ciência antes mesmo da invenção do cálculo pois, de acordo com Eves (1995), em 1202 Leonardo de Pisa publicou um estudo nomeado “Liber Abaci”, onde realiza um estudo sobre o crescimento hipotético de coelhos. Tal estudo ficou conhecido como “Os coelhos de Fibonacci”, onde Fibonacci significava filho do Bonnacio, apelido de Leonardo de Pisa.

Após Newton inventar o cálculo e também as equações diferenciais, foram desenvolvidos novos modelos que permitiam a sistematização do crescimento de certas populações.

Em 1798 o matemático Thomas Robert Malthus (1766- 1834) criou um modelo que descrevia o crescimento de populações pequenas onde a taxa de crescimento era proporcional à própria população (BOYER, 1996). A solução de tal modelo é uma função exponencial e não representa a realidade das populações visto que há inibidores que impedem um crescimento sem limites.

A correção para o modelo de Malthus foi proposta no ano de 1838, pelo matemático belga Pierre-François Verhulst, onde o modelo proposto com ele possuía um inibidor de crescimento proporcional à população como visto abaixo.

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Onde  $P$  é o valor da população no instante  $t$ ,  $a$  é a taxa de crescimento da população e  $b$  corresponde a uma taxa de inibição ao crescimento que corrige o modelo de Malthus.

No mesmo ano, o matemático inglês Benjamin Gompertz desenvolveu um modelo muito parecido com o de Verhulst onde o inibidor é proporcional ao logaritmo da população

$$\frac{dP}{dt} = P (a - \ln P)$$

A similaridade entre os modelos motivou este trabalho que tem como objetivo analisar tais sistemas e suas soluções a fim de verificar se as similaridades se mantêm no comportamento de tais funções ou existem apenas em sua estruturação.

## 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Os modelos comparados nesse trabalho são expressos através de equações diferenciais e, para o estudo de tais modelos é essencial o domínio dos fundamentos teóricos no qual ele se baseia. Ou seja, é necessário um estudo sobre as equações diferenciais.

O nome dado a tais equações sugere prontamente quais as equações esperadas para elas pois a palavra diferencial refere-se a derivadas e ao ler-se *equações diferenciais* assume-se que são equações envolvendo derivadas. Define-se como Equação Diferencial (ED) toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes (ZILL E CULLEN, 2002).

### 2,1 CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais classificam-se de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Quando uma equação diferencial possui derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a somente uma variável independente ela é considerada uma equação diferencial ordinária, representada pela sigla EDO. Sendo exemplo as equações:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$

$$(y - x)dx + 4x dy = 0$$

As equações que possuem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de uma ou mais variáveis independentes são nomeadas equações diferenciais parciais (EDP). Como por exemplo:

$$\frac{du}{dy} = - \frac{dv}{dx}$$

Ao classificar as ED quanto à ordem, define-se que a derivada de maior ordem em uma equação diferencial é a ordem da equação. Portanto, no exemplo

$$\frac{d^3y}{dx} - 3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^7 = x$$

está expressa uma EDO de terceira ordem.

A classificação das equações diferenciais leva em conta vários aspectos, como a presença de uma ou mais variáveis independentes. Neste trabalho, analisaremos algumas equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial é classificada como linear quando possui duas características específicas:

1º - A variável independente e todas as suas derivadas tem que ser de grau um, ou seja, a potência de cada termo é 1.

2º - Cada coeficiente depende apenas da variável independente.

Portando a EDO que possui essas características é classificada como uma equação diferencial ordinária linear e pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

Já a que não possui tais características é classificada como uma equação diferencial ordinária não-linear.

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é homogênea quando, para  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = f(kx, ky)$$

A equação diferencial expressa como

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é classificada como uma equação diferencial exata quando

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Uma equação diferencial ordinária é classificada como uma EDO separável quando expressa por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Podendo também ser escrita como:

$$h(y)dy = g(x) dx$$

onde é possível deduzir que

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + C$$

sendo C uma constante de integração.

Neste trabalho, as equações diferenciais apresentadas são do tipo

separáveis e, ao deduzi-las analiticamente, serão demonstradas todas as etapas necessárias para a obtenção da função solução.

## 2.2 AS SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

Por definição tem-se que “qualquer função  $f$  definida em um intervalo  $I$ , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo” (ZILL E CULLEN, 2001, p.4). Ou seja, para que a função  $f$  seja solução da equação diferencial ordinária

$$F [ x, y, y', \dots , y^{(n)} ] = 0$$

ela deve possuir  $n$  derivadas e satisfazer a equação tal que:

$$F [ x, f(x), f'(x) \dots , f^{(n)}(x) ] = 0$$

O intervalo  $I$  não foi definido pois pode variar de acordo com a necessidade, podendo ser um intervalo fechado  $[a,b]$ , aberto  $(a,b)$  ou infinito  $(0,\infty)$  entre outros.

Ressalta-se que nem toda equação diferencial possui solução e que as que possuem podem ser classificadas entre solução trivial, implícita ou explícita. Uma solução trivial é aquela onde a função  $y = 0$  satisfaz a equação diferencial para todo  $x$  no intervalo  $I$ .

Tem-se então que uma solução para a equação diferencial ordinária que pode ser escrita na forma  $y = f(x)$  é chamada de solução explícita. Dizemos que uma relação  $G(x, y) = 0$  é uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária em um intervalo  $I$  se ela define uma ou mais soluções explícitas em  $I$  (ZILL E CULLEN, 2001).

Ao resolver uma equação diferencial de primeira ordem é comum obter uma família de curvas – funções – com um parâmetro arbitrário e, por consequência, cada membro dessa família é solução da equação diferencial dada. Com isso, afirma-se que uma equação diferencial tem infinitas soluções que dependem do parâmetro arbitrário e que, para que se calcule uma solução particular é necessário dar valores específicos para tais parâmetros.

## 2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS

Para modelar ou descrever o comportamento de certos fenômenos ou sistemas por meio da matemática é necessário identificar as variáveis do modelo, ou seja, as leis que alteram o sistema, e possuir um conjunto de informações sobre o sistema que se deseja modelar.

Tais modelos muitas vezes possuem como variáveis independente o tempo já que almejam descrever o comportamento do sistema no passado, presente e futuro e muitos deles são expressos por meio de equações diferenciais ou através de um sistema de equações diferenciais e, esperasse que um modelo matemático razoável do sistema tenha uma solução que seja consistente com o comportamento conhecido do sistema.

A seguir são mostrados alguns exemplos de modelagens de sistemas empregando equações diferenciais.

Um corpo em queda livre:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

Sistema massa-mola:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}(\theta) = 0$$

Uma corda girando:

$$\frac{d}{dx} \left[ T(x) \frac{dy}{dx} \right] + p\omega^2y = 0$$

Circuitos em série:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(q)$$

Lei do Esfriamento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k (T - T_m)$$



Drenagem de um tanque através de uma abertura:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_o}{A_w} \sqrt{2gh}$$

Capitalização contínua:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

Deflexão de vigas:

$$El \frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

Disseminação de doença contagiosa:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n+1-x)$$

O foco deste trabalho é comparar duas equações que modelam o crescimento de dadas populações. Tais modelos são conhecidos como modelo Logístico

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

e a curva de Gompertz

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P)$$

Em ambos os modelos  $a$  e  $b$  são constantes, onde  $a$  representa o crescimento da população  $P$  e  $b$  é o valor de inibição para que o crescimento não ocorra de forma exponencial. Suas soluções e comportamentos serão detalhados nos capítulos a seguir.

### 3 APARATO HISTÓRICO SOBRE O ESTUDO DO CRESCIMENTO DE POPULAÇÕES

De acordo com Eves (1995) e Boyer (1996), estudo das dinâmicas de populações mais antigo que se tem registro é do ano de 1202, quando Leonardo de Pisa (1170-1250), publicou um trabalho nomeado “Liber Abaci”, onde destaca-se o conhecido

problema dos coelhos, que se refere ao número de casais em uma população de coelhos após doze meses, considerando-se que:

- 1) No primeiro mês tem-se apenas um casal;
- 2) Casais reproduzem-se somente após o segundo mês de vida;
- 3) Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
- 4) Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
- 5) Os coelhos nunca morrem.

Tal problema questiona: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?

Dessa maneira, ao seguir o raciocínio supracitados obtém-se a Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos da sequência são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

E, de acordo com Pereira (2008), essa sequência segue a lei de formação:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, \quad \text{para } n \geq 2$$

onde  $a_1 = a_2 = 1$ .

Tem-se então que a primeira modelagem para prever o crescimento de uma população não é feita por meio de uma equação diferencial, visto que o cálculo ainda não havia sido inventado.

Entretanto, quando Isaac Newton (1642-1727) cria o Cálculo Diferencial, e também as equações diferenciais, inicia-se uma nova era nas ciências, revolucionando a maneira como o mundo era interpretado e criando assim uma nova maneira de modelar seus sistemas.

Leonhard Euler criou no século dezessete um modelo para o crescimento de uma população utilizando uma equação de diferenças e, no mesmo século, Daniel Bernoulli deduziu um modelo diferencial que demonstrava a disseminação da varíola. Em 1798, Thomas Robert Malthus (1766- 1834) publicou um trabalho baseado no modelo de Euler onde a taxa de crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da própria população (EDELSTEIN-KESHET, 2005), o modelo é:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Neste modelo  $P$  representa o tamanho da população e  $r$  representa a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade. Sua solução geral é uma função com crescimento exponencial expressa como mostrado abaixo, onde  $P_0$  é o tamanho da população no instante  $t = 0$ .

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Entretanto essa equação não representa um modelo acurado para crescimento populacional quando esta é muito grande. Condições de superpopulação com as consequentes deteriorações do meio ambiente, tais como poluição e excessiva e competitiva demanda por alimentos e combustível, podem ter um efeito inibidor no crescimento populacional (ZILL e CULLEN, 2001).

Quando isso ocorre, o crescimento populacional é afetado pela falta de recursos e a população não cresce de forma exponencial conforme previsto no modelo de Malthus. Esse ponto de ruptura com o modelo foi nomeado de catástrofe Malthusiana.

Com o objetivo de corrigir o modelo criado por Malthus e de criar um modelo que descrevesse o crescimento populacional de diversos países, em 1838 o belga Pierre François Verhulst (1804 - 1849) realizou uma mudança no modelo apresentado por Malthus, criando o modelo:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Que também pode ser escrito como:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

A substituição do  $r$  por  $a - bP$  foi consequência do seguinte raciocínio: a população não pode crescer indefinidamente, como no modelo exponencial de Malthus, pois logo não haveria mais espaço nem alimento para todos; assim, é necessário algum freio a este crescimento. Verhulst argumentou que este freio pode ser modelado como uma diminuição da taxa de crescimento, à medida que a população cresce. Esta diminuição pode ser, matematicamente, conseguida subtraindo-se da constante de

proporcionalidade “a” (ou “r”) um termo que aumenta à medida que a população aumenta. O termo “-bP” é a maneira mais simples de implementar tal ideia, embora outras maneiras (como a de Gompertz) tenham aparecido na literatura.

Também no ano de 1838 o matemático Benjamim Gompertz criou um modelo que utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável (BASSANEZI, 2009). Isto significa que a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento.

$$\frac{dP}{dt} = P (a - \ln P)$$

Este modelo é bastante utilizado para crescimentos celulares no geral, tais como plantas, bactérias, tumores entre outros (BASSANEZZI, 2011). Havendo pouca literatura relacionada a ele, se comparado com o modelo logístico.

## 4 O MODELO LOGÍSTICO

Como visto nos capítulos anteriores o modelo logístico é expresso por meio da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = P (a - bP) \tag{1}$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

A constante  $a$  representa a taxa média de crescimento de uma dada população  $P(t)$  no instante  $t$  e o parâmetro  $bP$  representa a taxa de inibição de crescimento desta população considerando fatores como alimentos disponíveis e espaço.

### 4.1 SOLUÇÃO GERAL DO MODELO LOGÍSTICO.

Como visto no segundo capítulo, a equação diferencial (1) pode ser classificada como uma equação diferencial ordinária separável pois consegue ser expressa como:

$$\frac{1}{P(a-bP)}dP = dt \quad (2)$$

Através de frações parciais têm-se que:

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP}$$

Substituindo em (2) a equação se transforma em:

$$\left[ \frac{(1/a)}{P} + \frac{(b/a)}{(a-bP)} \right] dP = dt$$

Integrando a equação temos que:

$$\int \left[ \frac{(1/a)}{P} + \frac{(b/a)}{(a-bP)} \right] dP = \int dt$$

Onde

$$\int \left[ \frac{(1/a)}{P} + \frac{(b/a)}{(a-bP)} \right] dP = \frac{1}{a} \ln|P| - \frac{1}{a} \ln|a-bP| + c_1 = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{P}{a-bP} \right| + c_1$$

e

$$\int dt = t + c_2$$

Portanto tem-se que:

$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{P}{a-bP} \right| + c_1 = t + c_2$$

$$\ln \left| \frac{P}{a - bP} \right| = at + ac_3$$

$$\frac{P}{a - bP} = e^{at+ac_3} = e^{at} \times e^{ac_3}$$

Onde  $e^{ac_3} = K$ , ou seja:

$$\frac{P}{a - bP} = Ke^{at} \quad (3)$$

Assim é possível deduzir que:

$$P = Ke^{at} (a - bP)$$

$$P = aKe^{at} - bPKe^{at}$$

$$P + bPKe^{at} = aKe^{at}$$

$$P(1 + bKe^{at}) = aKe^{at}$$

Conclui-se então que:

$$P(t) = \frac{aKe^{at}}{(1 + bKe^{at})} = \frac{aK}{e^{-at} + bK} \quad (4)$$

Quanto calculamos  $P_0$ , ou seja, quando  $t = 0$ ., temos por meio de (3) que

$$\frac{P_0}{a - bP_0} = K \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4) temos então que:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}} \quad (6)$$

Sendo essa a solução geral do modelo Logístico quando  $P(0) = P_0$

Para esboçar o gráfico da solução (6) inicialmente será analisado os limites de tal solução.

Quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $P(t) \rightarrow \frac{aP_0}{bP_0}$  ou seja,  $P(t) \rightarrow \frac{a}{b}$

Quando  $t \rightarrow -\infty$  temos que  $P(t) \rightarrow 0$

Em sequência, a derivada (1) resulta em:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P \left( -b \frac{dP}{dt} \right) + (a - bP) \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = (a - 2bP) \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P(a - bP)(a - 2bP)$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 2b^2P \left( P - \frac{a}{b} \right) \left( P - \frac{a}{2b} \right)$$

Ao igualar  $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$  é possível encontrar os pontos de inflexão do gráfico de (6).

$$0 = 2b^2P \left( P - \frac{a}{b} \right) \left( P - \frac{a}{2b} \right) \Rightarrow$$

$$P = 0, \quad P = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad P = \frac{a}{2b}$$

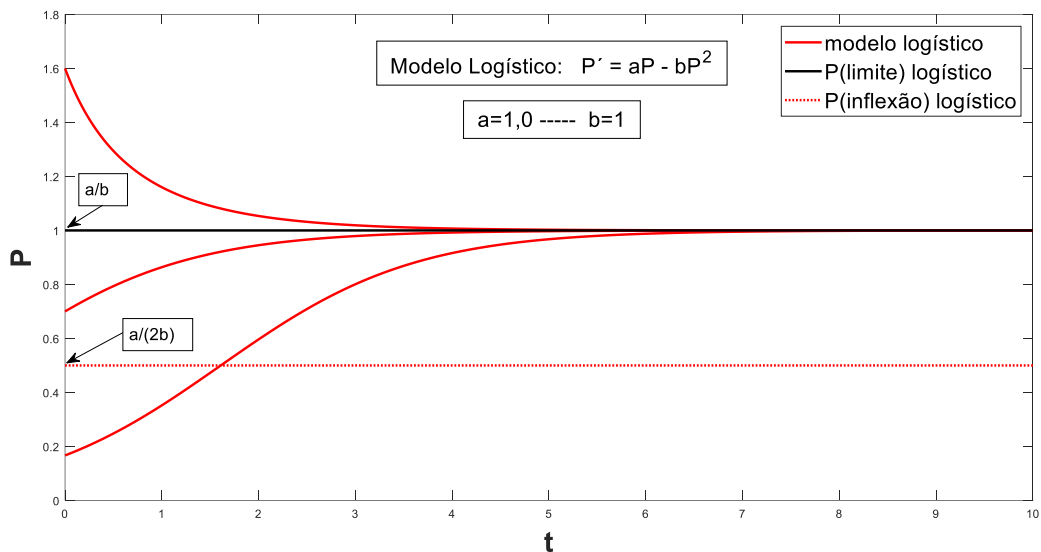
Os possíveis pontos de inflexão para  $P = 0$  e  $P = \frac{a}{b}$  podem ser descartados pois quando a população se inicia nesses valores, ela se mantém constante. Sendo assim, o ponto onde  $P = \frac{a}{2b}$  se torna o único ponto de inflexão do gráfico.

Com essa nova informação pode-se concluir que  $P(t)$  será crescente entre 0 e  $\frac{a}{b}$ . Quando  $0 < P(t) < \frac{a}{2b}$  tem-se  $P'' > 0$  e o gráfico tem concavidade “para cima”,

já quando  $\frac{a}{2b} < P(t) < \frac{a}{b}$  tem-se  $P'' < 0$  e a concavidade de  $P(t)$  é “para baixo”.

Portanto, conclui-se assim que o gráfico de  $P(t)$  possui comportamento em forma de “S” como visto gráfico 1 e que muda de côncavo para convexo quando  $P(t) = \frac{a}{2b}$ .

**Gráfico 1:** Comportamento da solução do modelo Logístico quando  $a = 1$  e  $b = 1$ , para  $P(0) = 0,18$ ;  $P(0) = 0,7$  e  $P(0) = 1,5$ .



Fonte: Produzido pela autora

## 5. A CURVA DE GOMPERTZ

A curva de Gompertz é uma variação do modelo Logístico e é expressa sendo:

$$\frac{dP}{dt} = P (a - b \ln P) \quad (7)$$

Onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas e com definições similares as do modelo de Verhulst.

Tal equação é muito similar a equação logística e também pode ser classificada como uma equação diferencial ordinária separável visto que pode ser expressa na forma:

$$\frac{dP}{P (a - b \ln P)} = dt$$



Entretanto, para facilitar a dedução da solução analítica de (7) igualaremos (7) a zero com o objetivo de calcular o valor de  $a$ .

$$\frac{dP}{dt} = P (a - b \ln P) = 0$$

Ou seja,

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad (a - b \ln P) = 0$$

Como a solução trivial  $P(t) = 0$  não envolve a constante  $a$ , será utilizado  $(a - \ln P) = 0$ , ou seja:

$$a - b \ln P = 0$$

$$a = b \ln(P \text{ max}) \tag{8}$$

$$\ln(P \text{ max}) = \frac{a}{b}$$

$$P \text{ max} = e^{\frac{a}{b}} = K$$

Este  $K = e^{\frac{a}{b}}$  representa a capacidade do meio e, ao substituir em (8) têm-se que

$$a = b \ln(K) \tag{9}$$

Substituindo (9) em (7) chega-se a:

$$\frac{dP}{dt} = P (b \ln K - b \ln P)$$

Ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = bP \ln \left( \frac{K}{P} \right) \tag{10}$$

## 5.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA CURVA DE GOMPertz

O método utilizado para a solução de (10) é a separação de variáveis, reorganizando (10) em:

$$\frac{dP}{P \ln\left(\frac{K}{P}\right)} = b dt$$

Integrando a igualdade temos que:

$$\int \frac{1}{P \ln\left(\frac{K}{P}\right)} dP = \int b dt \quad (11)$$

Onde para calcular  $\int \frac{1}{P \ln\left(\frac{K}{P}\right)} dP$  utiliza-se da mudança de variáveis  $u = \ln\left(\frac{K}{P}\right)$  e  $du = -\frac{dP}{P}$ .

Temos então que:

$$\int \frac{1}{P \ln\left(\frac{K}{P}\right)} dP = - \int \frac{du}{u} = -\ln(u) + c_1 = -\ln\left[\ln\left(\frac{K}{P}\right)\right] + c_1$$

e sabemos que

$$\int b dt = bt + c_2$$

Substituindo ambas em (11) temos que

$$-\ln\left[\ln\left(\frac{K}{P}\right)\right] + c_1 = bt + c_2$$

$$-\ln\left[\ln\left(\frac{K}{P}\right)\right] + c_3 = bt \quad (12)$$

Ao calcularmos  $P(0)$  obtemos  $P_0$  e, com essa informação calcula-se em (12) que:

$$c_3 = \ln\left[\ln\left(\frac{K}{P_0}\right)\right]$$

E substituindo em (12) origina-se:

$$-\ln \left[ \ln \left( \frac{K}{P} \right) \right] + \ln \left[ \ln \left( \frac{K}{P_0} \right) \right] = bt$$

Ou melhor:

$$\ln \left[ \frac{\ln \left( \frac{K}{P_0} \right)}{\ln \left( \frac{K}{P} \right)} \right] = bt$$

Assim obtêm-se

$$\ln \left( \frac{K}{P} \right) = \ln \left( \frac{K}{P} \right) e^{bt} \quad \text{ou} \quad \ln \left( \frac{K}{P} \right) = \ln \left( \frac{K}{P_0} \right) e^{-bt}$$

Resultado em:

$$P(t) = K e^{[\ln \left( \frac{P_0}{K} \right)] e^{-bt}} \quad \text{ou} \quad P(t) = K \{ e^{[\ln \left( \frac{P_0}{K} \right)]} \} e^{-bt}$$

Podendo ser simplificada por

$$P(t) = K \left( \frac{P_0}{K} \right)^{e^{-bt}} \tag{13}$$

## 5.2 O GRÁFICO DA CURVA DE GOMPERTZ

Para esboçar o gráfico da solução (13) serão analisados os limites de tal solução e a derivada de (11).

Quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $P(t) \rightarrow K$  ou seja,  $P(t) \rightarrow e^{\frac{a}{b}}$ .

Quando  $t \rightarrow 0$  temos que  $P(t) \rightarrow P_0$ .

Ao analisar os limites, constata-se que “no início do tempo, a população é igual a população inicial, de acordo com a condição inicial colocada e para grandes intervalos de tempo a população tende a capacidade do meio, independentemente da população inicial” (VILLAR, 2014, p. 25).

O ponto de inflexão de (13) é determinado através da igualdade da derivada do modelo de Gompertz a zero.

Derivando (5) obtêm-se

$$\frac{d^2P}{dt^2} = b \ln\left(\frac{K}{P}\right) \frac{dP}{dt} + \frac{Pb}{\left(\frac{K}{P}\right)} \left(\frac{-K}{P^2}\right) \frac{dP}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = b \frac{dP}{dt} \left[ \ln\left(\frac{K}{P}\right) - 1 \right] = 0$$

Ou seja, os possíveis pontos de inflexão são quando  $b = 0$  ou  $P = \frac{K}{e}$ .

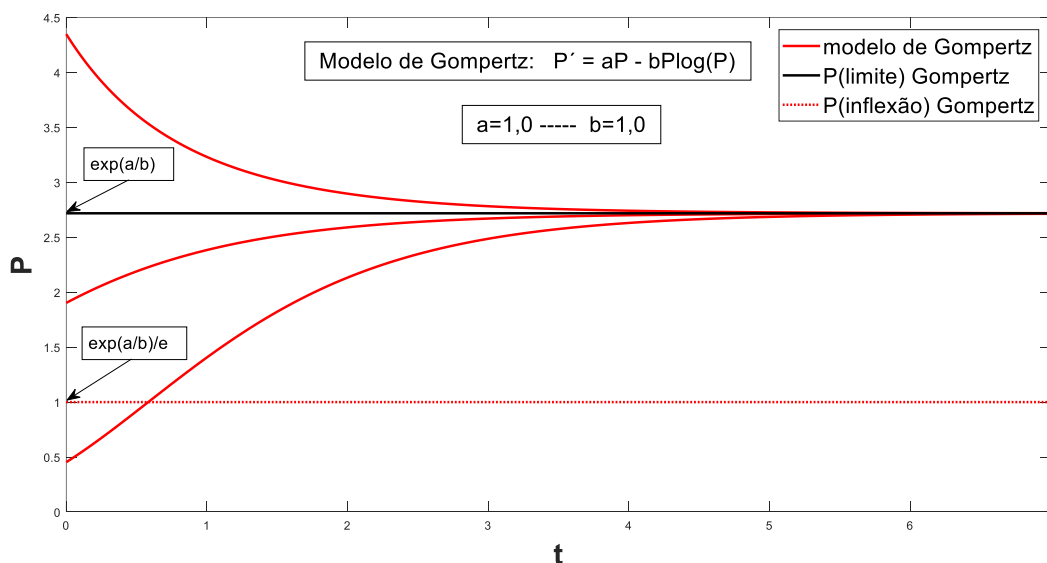
O caso em que  $b = 0$  acontece quando o crescimento é nulo, portando o ponto de inflexão de (7) ocorre quando  $P = \frac{K}{e}$ .

Com isso sabe-se que:

Quando  $0 < P(t) < \frac{K}{e}$  tem-se  $P'' > 0$  e o gráfico tem concavidade “para cima”, já quando  $\frac{K}{e} < P(t) < K$  tem-se  $P'' < 0$  e a concavidade de  $P(t)$  é “para baixo”.

Tal comportamento pode ser observado no gráfico 2.

**Gráfico 2:** Comportamento do modelo de Gompertz quando  $a = 1$  e  $b = 1$ , para  $P(0) = 0,45$ ;  $P(0) = 1,9$  e  $P(0) = 4,3$ .



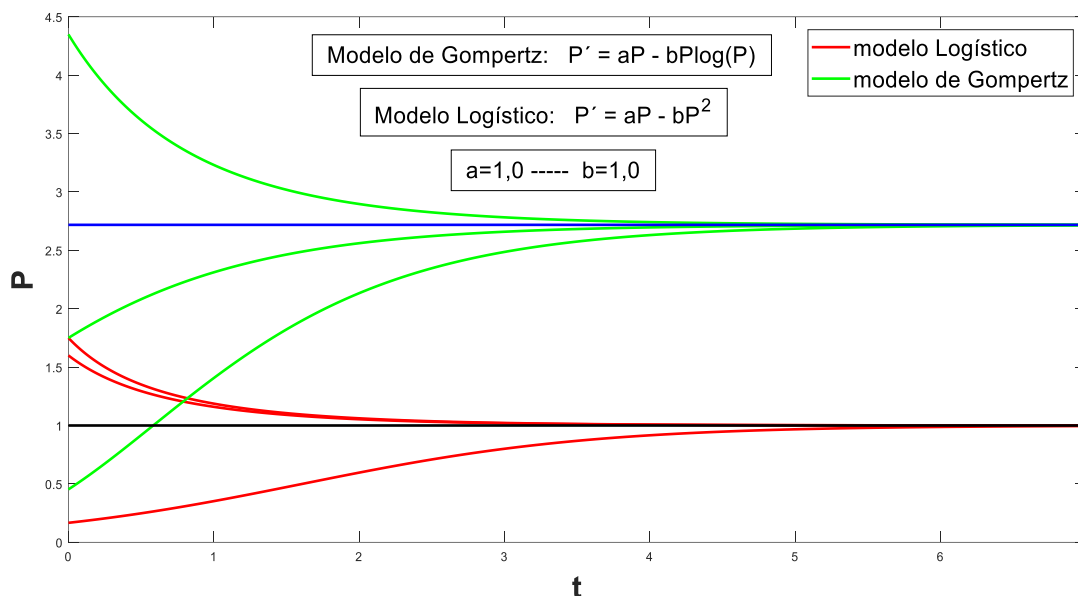
Fonte: Produzido pela autora.

## 6 COMPARANDO GRAFICAMENTE OS MODELOS

Ambos os modelos apresentam comportamento semelhante, diferindo, principalmente, nos valores limites alcançados. De uma maneira geral, considerando os mesmos parâmetros nas equações, o valor limite do modelo de Gompertz é maior do que o valor limite do modelo Logístico

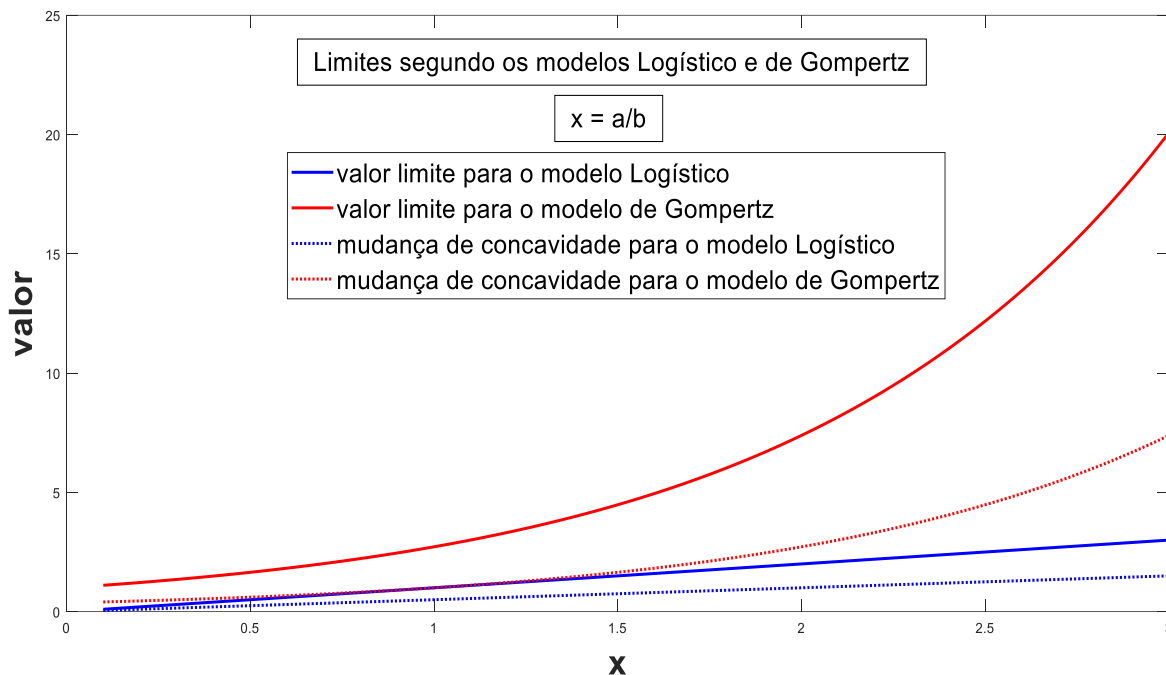
Isto pode ser melhor visto nos gráficos 3 e 4 a seguir onde as soluções de ambos os modelos, submetidas aos mesmos parâmetros, foram colocadas em um mesmo gráfico com o objetivo de facilitar a comparação entre elas.

**Gráfico 3:** Comparação entre o comportamento do modelo de Gompertz e do modelo logístico quando  $a = 1$  e  $b = 1$ .



Fonte: Produzido pela autora.

**Gráfico 4:** Comparação entre os limites do modelo de Gompertz e do modelo logístico.  
Fonte: Produzido pela autora.



Fonte: Produzido pela autora.

## 7 CONCLUSÃO

Após analisar o comportamento de ambos modelos, pode-se concluir que o comportamento de ambos é semelhante sendo suas principais diferenças no ponto de inflexão e no limite de cada modelo.

No modelo Logístico o ponto de inflexão pode ser calculado quando  $P(t) = \frac{a}{2b}$ , já no modelo de Gompertz a inflexão encontra-se no instante em que  $P(t) = \frac{K}{e}$ .

Ao que se refere ao limite dos modelos, no modelo Logístico o limite é alcançado quando  $P(t) = \frac{a}{b}$  e no modelo de Gompertz encontra-se o limite quando  $P(t) = e^{\frac{a}{b}}$  fazendo assim com que, ao adotar os mesmos parâmetros nos dois modelos, o limite do modelo de Gompertz seja maior do que o limite do modelo Logístico.

As diferenças citadas acima vem sendo cada vez mais exploradas na literatura moderna, em especial para facilitar a escolha entre os modelos a fim de obter um sistema que reproduza com a maior fidelidade possível o crescimento da população dada.

O modelo de Gompertz é considerado atualmente o mais adequado para

situações em que a população final é grande, como por exemplo em tumores de câncer (DOMINGUES, 2011).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACAËR, N. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. London: Springer, 2011.

BASSANEZI, R.C. FERREIRA, JR.W.C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra.1988.

\_\_\_\_\_. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2009.

\_\_\_\_\_. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2011.

BRAUN. M. *Differential Equation and Their Applications*. Nova York: Springer-Verlag, 1983. 543 p.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher Ltda./Editora da Universidade de São Paulo, 1996. 496 p.

DOMINGUES, José Sérgio. Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. *Biomatemática* 21, Campinas, v.9, p. 103–112, 2011.

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Philadelphia, PA: SIAM, 2005.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP, 1995.

FORSAN, Juliana Froes. *Estudo e aprofundamento de alguns modelos matemáticos apresentados no ensino médio*. Disponível em <<http://hdl.handle.net/11449/151705>>. Acesso em: 20 set. 2019.

GUIMARÃES, Paulo Roberto Fonteles. Uma aplicação do modelo de regressão logística na previsão de falência empresarial no Brasil. *Revista Brasileira de Economia de Empresas*, v.18, n.2, Brasília, 2018. ISSN: 1676-8000. Disponível em <<https://portalrevistas.ucb.br/index.php/rbee/article/view/7963/5932>> Acesso em: 02 out. 2019.

HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. *Matlab 6 – Curso Completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 676 p.

MAGALHÃES Maycon Luiz A., LEITE, Neila M. Gualberto. Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional. *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional do Nordeste*, 2012, p. 351-353. ISSN: 2317-3297. Disponível em

<<http://sbmac.locaweb.com.br/cmaccs/cmacc-ne/2012/trabalhos/PDF/294.pdf>>. Acesso em 30 set. 2019.

MAY, R. M. *Theoretical Ecology: principles and applications*. Oxford: Wiley-Blackwell, 1981.

MENDES, C. A. B., VEGAS. Técnicas de Regressão Logística aplicadas à análise ambiental. *Revista Geografia*, Londrina, v. 20, n.1, p. 5-30, 2011. Disponível em <<http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/geografia/article/viewFile/6878/9676>> . Acesso em 02 out. 2019.

MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002. 527 p.

MURRAY, J. *Mathematical Biology: An Introduction*, Volume 1. New York, NY: Springer, 2002.

PEREIRA, Livia Da Cás. FERREIRA, Márcio Violante. Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. *Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas*, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008. Disponível em <<https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1236/1172>>. Acesso em 30 set. 2019

SODRÉ, Ulysses, *Modelos Matemáticos*. Londrina, 2007. Disponível em <<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>>. Acesso em 30 set. 2019.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, MA: Perseus Books, 1994.

TSONIS, A. A. *Chaos: from theory to applications*, New York, Plenum Press, 1992. 348 p.

VILLAR, Renato Pacheco. *Estudo analítico da equação de fisher linearizada: determinação de tamanhos mínimos de fragmentos populacionais*. Poços de Caldas, 2014, 75f. Dissertação (Mestre em Ciências e Engenharia Ambiental) – Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, 2014. Disponível em <<https://www.unifal-mg.edu.br/ppgcea/files/file/disserta%C3%A7%C3%B5es/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Renato%20Pacheco.pdf>>. Acesso em 01 out. 2019.

ZILL, D. G. & CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. Makron Books, 2001. 473 p.