

**CICLOIDE:**

uma abordagem sobre as propriedades tautócrona e braquistócrona.

Elias Gabriel Firmino

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF

eliasgabrielfirmينو@gmail.com

Igor de Assis Borges

Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – Uni-FACEF

igor.13.borges@outlook.com

Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho

Doutora em Ciência e Docente do Uni-FACEF

lucindarcoelho@gmail.com

**RESUMO**

Durante o século XVII, a comunidade científica cultivou uma prática bastante interessante onde os pensadores destinavam problemas e desafios uns aos outros por meio de correspondências ou por revistas. Nesta época, dentre várias situações discutidas, o matemático suíço Jean Bernoulli despertou atenção de grandes protagonistas da ciência por meio de um problema que consistia em determinar a trajetória pela qual um corpo, apenas sob ação gravitacional e inicialmente em repouso, parte de um ponto A e atinge o ponto B, estando eles em alturas diferentes e não pertencentes a mesma vertical, no menor tempo possível. A provocação ganhou atenção de Isaac Newton, Gottfried Leibniz, entre outros, que apresentaram a curva cicloide como solução para esse problema. A curva que já havia sido estudada anos antes por Galileu, retornava à pauta de renomados personagens do universo científico, para então, tornar-se precursora de um importante avanço matemático. Euler e Lagrange, formularam uma solução do problema que mais tarde, veio a impulsionar o desenvolvimento do cálculo variacional. O intuito deste trabalho é refazer os passos de Euler-Lagrange e construir três rampas em madeira, para mostrar como a cicloide invertida apresenta as propriedades de ser uma curva tautócrona e também braquistócrona. Na tautócrona, o tempo independe da altura em que o corpo é lançado e na braquistócrona o tempo de queda é o menor possível. Para tanto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica de estudo lógico-dedutivo, cujos resultados teóricos demonstram estas propriedades obtidas a partir do cálculo diferencial e integral, mais especificamente, técnicas variacionais para estudar uma equação diferencial ordinária que corroboram com os resultados experimentais. Entender a curva cicloide que tem propriedades matemáticas e físicas bastante interessantes, além de verificar a versatilidade de suas aplicações,

pode despertar o estímo nos estudantes incentivando-os a explorar e aprofundar ainda mais nos detalhes dessa curva intrigante.

**Palavras-chave:** Cicloide. Braquistócrona. Tautócrona. Parametrização. Propriedades.

## ABSTRACT

During the XVI century, the scientific community cultivated an interesting practice in which the thinkers sent problems and challenges to each other by correspondence or magazine. At that time, during many argued situations, the Swiss mathematician Jean Bernoulli attracted the attention of the great scientific protagonist by using a problem that consists of determining the trajectory through which a body, initially resting and only under gravitational action, goes from point A to a point B, these points being at different heights and not belonging to the same vertical. The challenge won the attention of Isaac Newton and Gottfried Leibniz, as well as that of others, who presented the cycloid curve as the solution for this problem. The curve that was studied years ago by Galileo, came to the attention of the most important people in the scientific universe, to become the route for an important mathematical advance. Euler and Lagrange, made a solution to the problem that picked up them to develop the variational calculus. The objective of this work is to follow the steps of Euler-Lagrange's development and build three wood ramps to show how the cycloid presents the brachistochrone and tautochrone properties. To tautochrone, it doesn't matter the fall height and to brachistochrone property the fall time is the shortest possible. To reach these goals, we did a bibliographic research as well as a deductive logical study in which the theoretical results show these properties got from the differential and integral calculus, specifically, variational techniques to study an ordinary differential equation that help with experimental results. To understand the curve that has mathematical properties so interesting, as well as verify the versatility of your applicability, can attract students' interest encouraging them to explore and probe this curve's details.

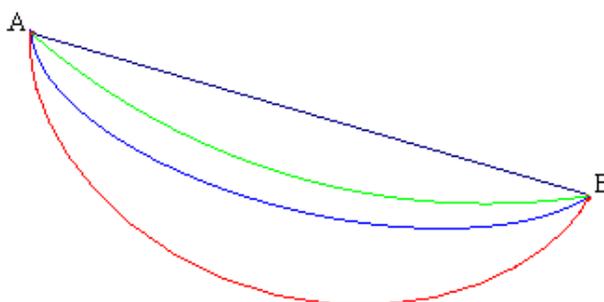
**Keywords:** Cycloid. Brachistochrone. Tautochrone. Parameterization. Properties.

## 1 INTRODUÇÃO

Tratando de trajetos, tende-se a pensar que a menor distância implica no menor tempo para percorrê-lo. No entanto, nem sempre isso ocorre, supondo que no caminho mais curto de casa ao trabalho, por exemplo, haja muitos semáforos, cruzamentos e congestionamento, um outro percurso, apesar de não ser o mais curto, pode ser o mais rápido.

Da mesma forma, tomados dois pontos em alturas diferentes, que não estejam sobre a mesma vertical, é possível traçar infinitos caminhos entre eles. É sabido que o segmento de reta define a menor distância entre os mesmos, entretanto, se um corpo for abandonado sobre cada uma dessas trajetórias, sofrendo somente aceleração gravitacional, o segmento de reta não define o caminho pelo qual este corpo atingiria o ponto mais baixo em menor tempo.

**Figura 1** – Curvas candidatas à solução do problema.



**Fonte:** Autores.

A curva que define o menor tempo de percurso recebe três nomes, os quais são dados de acordo com suas peculiaridades. Estes nomes são: cicloide, braquistócrona e tautócrona.

Portanto, esse trabalho tem por intuito entender o que é uma curva cicloide, para que serve, o que pode representar, uma vez que esta tem propriedades matemáticas e físicas bastante interessantes.

A cicloide é uma representação gráfica de dois problemas:

1º) Dados dois pontos em alturas diferentes, não pertencentes a mesma vertical, determinar o trajeto em que um corpo, apenas sob a ação da gravidade, atinge o ponto mais baixo em menor tempo, denominada

2º) Numa curva cicloide invertida, se dois corpos são soltos de pontos diferentes, os dois atingem o ponto mais baixo em tempos iguais, denominada tautócrona.

Nesse sentido, este texto traz, primeiramente, uma abordagem histórica e bibliográfica do problema que colocou em pauta o estudo da cicloide. Subsequentemente, tutoria a elaboração da cicloide no software GeoGebra, e estabelece parâmetros alicerçados na trigonometria e no cálculo de variações. Em seguida, discute-se o tratamento desse tópico e as possíveis abordagens relacionadas a aplicação de suas características e propriedades, inclusive no ensino de Matemática, pois a cicloide apresenta uma ampla versatilidade e flexibilidade relacionada a dificuldade de seu tratamento como um conteúdo formal.

Finalmente, são apresentadas a construção de três curvas em madeira que mostram, em um experimento envolvendo lançamentos de bolas de bilhar, que a cicloide invertida é uma curva tautócrona e braquistócrona. Corroborando a teoria, pode-se demonstrar que para a tautócrona, o tempo que a bola demora para atingir o ponto de mínimo não depende da altura inicial. Realizando experimento similar nas outras curvas, observa-se que a bolinha na braquistócrona sempre chega primeiro que nas demais rampas, pois o tempo de descida na primeira parte é sempre menor, confirmando o previsto. As pistas feitas em madeira apresentam dimensões reduzidas, podendo ser apresentadas em sala de aula, mostrando conceitos físicos e matemáticos.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

Em 1682 a Alemanha teve sua hemeroteca alterada. Neste ano nascia a primeira revista científica, publicada por Gottfried Wilhelm Leibniz e era voltada para anúncios e resumos de artigos de longa data e de obras contemporâneas (MACHADO, 2019).

Havia muitos assuntos abrangidos por ela, tais como: medicina, direito, história, física, geografia e teologia, a matemática contava, inclusive, com um espaço para discussão.

Foi publicada mensalmente até 1732, onde discutia-se muitos problemas e desafios matemáticos. Dentre esses desafios, o matemático suíço

Jean Bernoulli publicou em junho de 1696, um dos que mais atraiu atenção dos matemáticos e físicos da época e consistia em “definir a forma de uma trajetória que unisse dois pontos em alturas diferentes e não verticais, em que um objeto partindo do repouso e movido apenas pela força da gravidade levaria o menor tempo para atingir o ponto mais baixo”. Nas palavras de Jean Bernoulli: “Dados dois pontos A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade” (FERREIRA FILHO e ANDRADE, 2015).

Leibniz enviou o problema por carta aos grandes matemáticos e rapidamente a solução foi encontrada por vários deles como: Isaac Newton, os irmãos Jacques e Jean Bernoulli e inclusive pelo próprio fundador da revista (VEGA e SASSINE, 2011). A trajetória definida por eles como a solução do problema foi denominada cicloide, nome concedido a princípio por Galileu, que estudou as propriedades dessa curva no ano de 1600, e que, posteriormente por conta das singularidades físico-matemáticas apresentadas, ficou conhecida como: braquistócrona (MACHADO, 2019).

O termo – braquistócrona - é composto por dois radicais gregos que exprimem a ideia da resolução deste problema: “brakhisto” significa o menor ou mínimo, e “chronus” significa tempo (FERREIRA FILHO e ANDRADE, 2015).

No início do século XVIII, outros dois pensadores deram um novo olhar a esse fenômeno matemático. Euler e Lagrange solucionaram o problema através do Cálculo Variacional o que possibilitou, por meio da localização dos extremos funcionais, diversas aplicações à Física e à Matemática (COSTA e MOURA, 2015).

Machado (2019) assegura que entre essas aplicações, está a otimização de redes de distribuição de energia elétrica de uma certa região. Para distribuir energia elétrica à população, leva-se em conta a existência de serviços sociais prioritários, tais como: hospitais e polícia, os quais devem ser atendidos de forma eficaz a fim de que em caso de falta de energia, esses serviços não sejam prejudicados. Outro exemplo de aplicação para o Cálculo Variacional é o estudo da dinâmica de populações de estrutura molecular complexa.

Entre essas e outras aplicações aparentemente desconexas,

observa-se que as mesmas são oriundas da reformulação da mecânica clássica, impelida pelas resoluções do problema da braquistócrona, e que ficou conhecida como Mecânica Lagrangeana ou Mecânica Analítica e foi de grande relevância na revolução científica do fim do século XIX para o século XX.

Os estudos feitos por Jean Bernoulli apoiaram-se no princípio de Fermat. Este, afirma que a luz sempre percorre o caminho de menor tempo possível. Portanto, pode-se até mesmo formular uma proposta interdisciplinar entre Matemática e Física para uma abordagem no Ensino Básico (COSTA e MOURA, 2015).

Notada a relevância da resolução deste problema matemático, fez-se uma análise da viabilidade de sua abordagem no Ensino Médio e no Ensino Superior. Para tanto, propõe-se respectivamente, o uso de recursos tecnológicos a fim de estudar os parâmetros que definem as curvas braquistócrona e tautócrona através da trigonometria e do Cálculo Variacional.

### **3 BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR**

Utilizou-se um software para desenvolver um experimento didático que permite a inclusão do tema em aulas do Ensino Médio de forma lúdica, propondo, ao final, um desafio que interliga esse tipo de curva ao cotidiano do aluno, e pode propiciar uma aprendizagem interdisciplinar de Matemática e Física, diferente das aulas, que geralmente são expositivas. A aplicação no ensino não possui como objetivo substituir as aulas convencionais, e sim, propor uma metodologia alternativa.

Apesar dos problemas da braquistócrona e tautócrona poderem ser apresentados de maneira simplificada e lúdica no Ensino Médio, também é possível utilizá-la para deduzir e aplicar o Cálculo Variacional durante o Ensino Superior no estudo da Matemática Aplicada.

#### **3.1 ENSINO MÉDIO**

Além dos conceitos da Matemática e da Física, utilizou-se o software GeoGebra para obtenção da curva cicloide e uma construção por meio de um experimento dos efeitos da braquistócrona e tautócrona que nada mais são do que

a cicloide invertida, a fim de que seja uma experiência interessante, dinâmica e palpável aos discentes

Após desenvolver a cicloide no software, fez-se uma parametrização trigonométrica da curva para compreender o seu comportamento no plano cartesiano. Posteriormente, construiu-se três curvas utilizando madeira, com o propósito de verificar as propriedades da braquistócrona e tautócrona.

### 3.2 ENSINO SUPERIOR

O cálculo variacional – ou cálculo de variações – parte do princípio variacional como método para a resolução de problemas.

O principal objetivo desse método é encontrar funções que minimizem ou maximizem os valores que dependem diretamente dessas funções.

Há uma diferença significativa entre o cálculo de variações e o cálculo elementar. Enquanto o cálculo elementar estuda os valores nos quais determinada função atinge seus máximos e mínimos, o cálculo de variações procura as funções nas quais as variáveis a ela relacionadas, atingem tais pontos.

Portanto, o alvo a ser atingido ao aplicar o Cálculo Variacional aos problemas da braquistócrona e tautócrona é determinar a função pela qual um corpo, apenas sob força da gravidade, atinge o ponto inferior, isto é, na braquistócrona o tempo de descida é o menor possível para o trajeto que liga dois pontos quaisquer a mesma altura, enquanto na tautócrona o tempo que esse corpo demora para atingir o ponto de mínimo é independente da altura inicial.

Essas aplicações e a variedade de formas que a cicloide apresenta serão detalhadas nos capítulos seguintes, isto é, a construção da cicloide com o software GeoGebra e a parametrização das curvas braquistócrona e tautócrona por meio da trigonometria, que envolvem uma abordagem Matemática a nível médio, e, posteriormente, a parametrização da curva por meio do Cálculo Variacional, que envolve uma abordagem mais complexa, a nível de superior.

## 4 CURVA CICLOIDE NO GEOGEBRA

“O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se

De acordo com o Blog Software Livre na Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS/2019, GeoGebra é a aglutinação das palavras Geometria e Álgebra, e é o termo utilizado para denominar o aplicativo que reúne os dois campos em uma única interface gráfica GUI – Graphical User Interface.

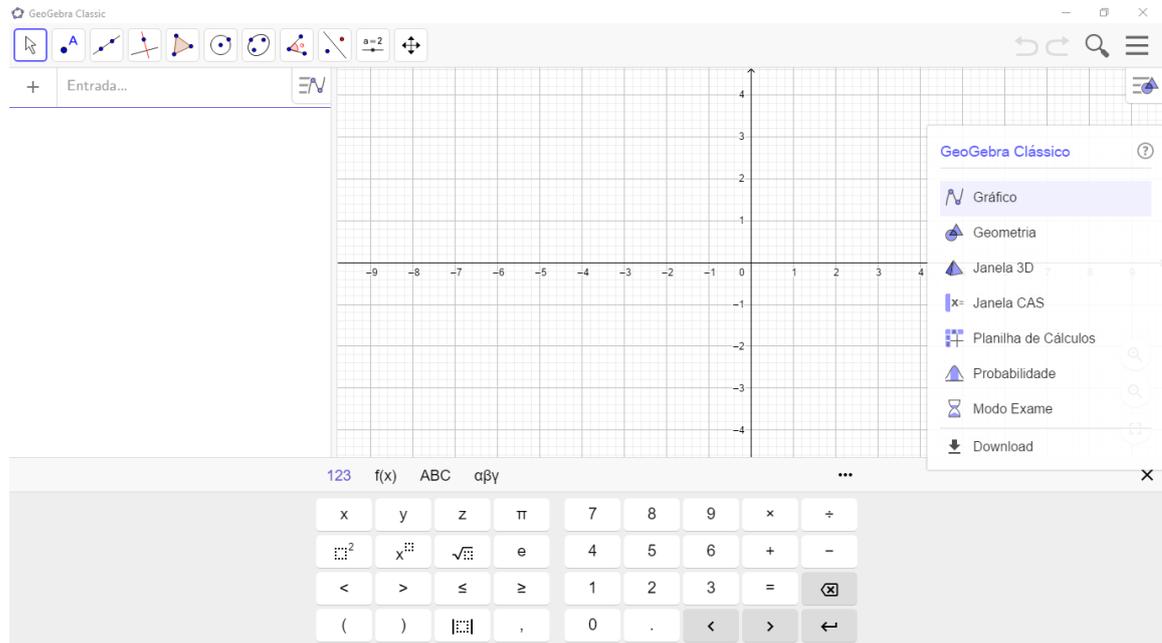
Por sua distribuição livre estar de acordo com os padrões da GNU (General Public License), o software é escrito em linguagem Java, o que viabiliza sua utilização em desktops, notebooks, tablets e smartphones. E, portanto, em escolas que porventura não possuam laboratórios de informática, é possível valer-se deste recurso através de dispositivos móveis.

Dado a acessibilidade, a interface intuitiva, e a dinâmica desse software, faz-se bastante pertinente a construção da curva que é solução do problema proposto por Jean Bernoulli no GeoGebra, para que por meio dela os estudantes possam visualizar e compreender como é concebida a curva cicloide.

#### 4.1 CONSTRUÇÃO DA CURVA CICLOIDE NO GEOGEBRA

Partindo da pressuposição que o software já esteja instalado no computador, faz-se a construção da curva e das animações que facilitarão sua demonstração e compreensão.

Ao abrir o programa tem-se a seguinte tela:

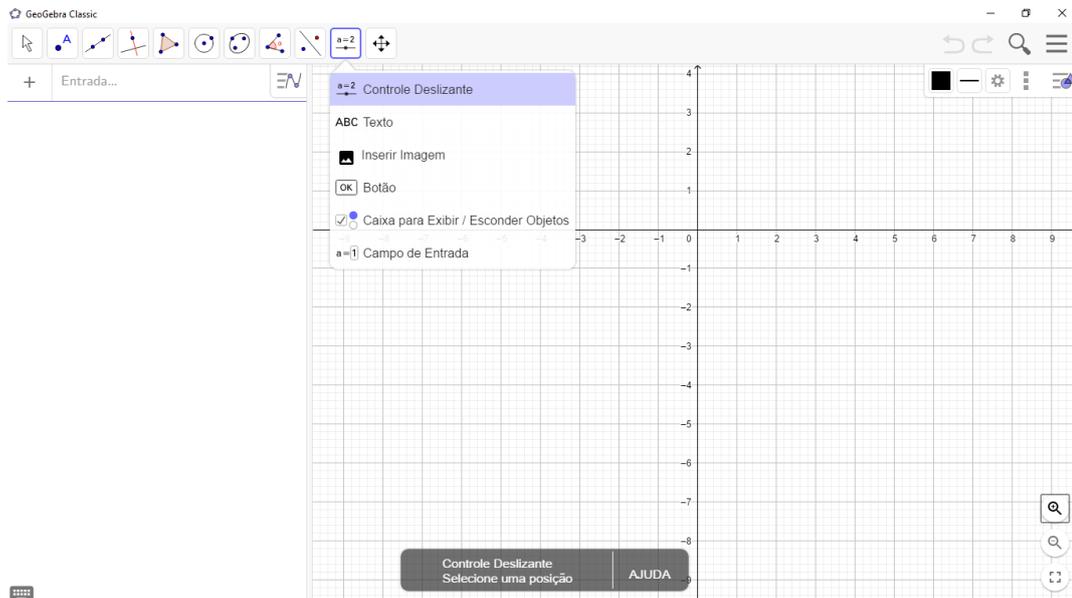


**Fonte:** Autores.

Em sua parte superior há uma barra com todas as ferramentas pertinentes a construção da braquistócrona. O primeiro passo é criar dois controles deslizantes. Os controles deslizantes são ferramentas destinadas a atribuir valores de um intervalo real, pré-definido pelo usuário, à uma incógnita. Eles também são responsáveis por permitir uma visualização gradativa do comportamento de determinada função, bem como por produzir animações a ela.

Essa ferramenta é facilmente localizada, pois se encontra na penúltima posição do menu.

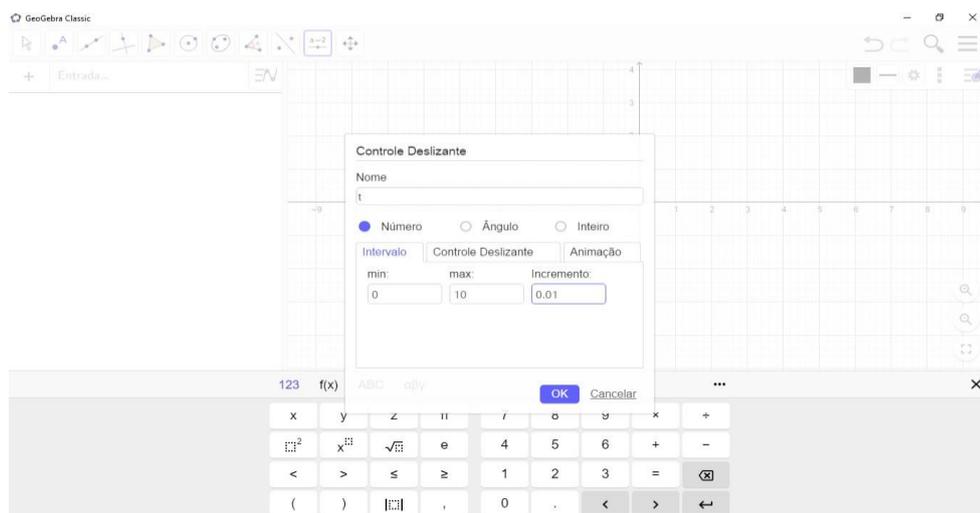
**Figura 3 – Localização do Controle Deslizante.**



Fonte: Autores.

Após selecionar essa ferramenta, é necessário clicar uma vez em qualquer ponto do plano cartesiano, para que a janela destinada a definir o intervalo real se abra.

**Figura 4 – Janela de configuração do controle deslizante.**

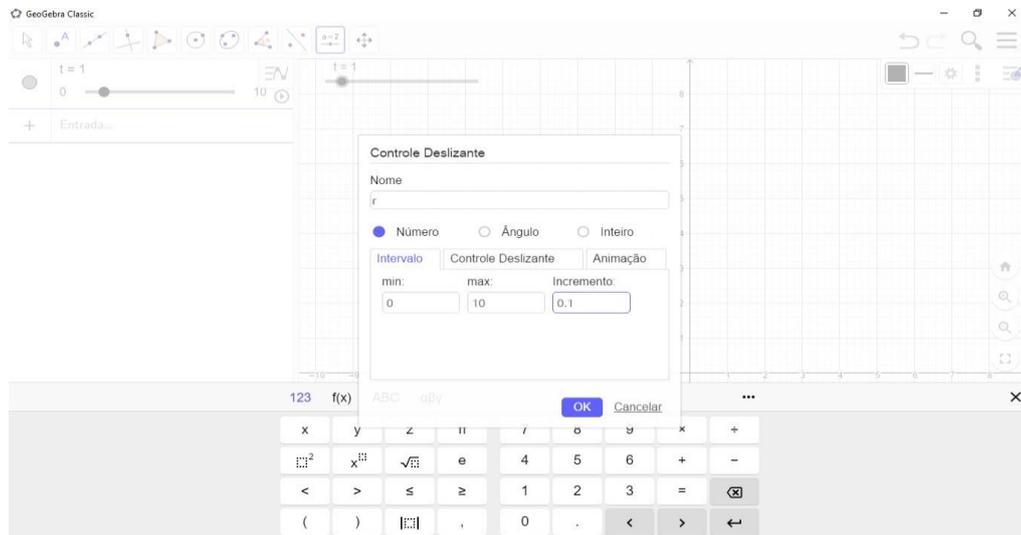


Fonte: Autores.

Nessa janela, nomea-se o primeiro controle deslizante de  $t$ , e define-se o intervalo real de  $0 \leq t \leq 10$ . O incremento é a taxa de variação de  $t$ , e para esse primeiro controle, é necessário defini-lo como 0,01.

Ao pressionar OK dá-se por concluída a criação do primeiro controle deslizante. E repetindo esse procedimento, criou-se também o controle deslizante  $r$ , que varia de  $0 \leq r \leq 10$  e tem seu incremento igual a  $0,1$ .

**Figura 5** – Configuração do controle deslizante.

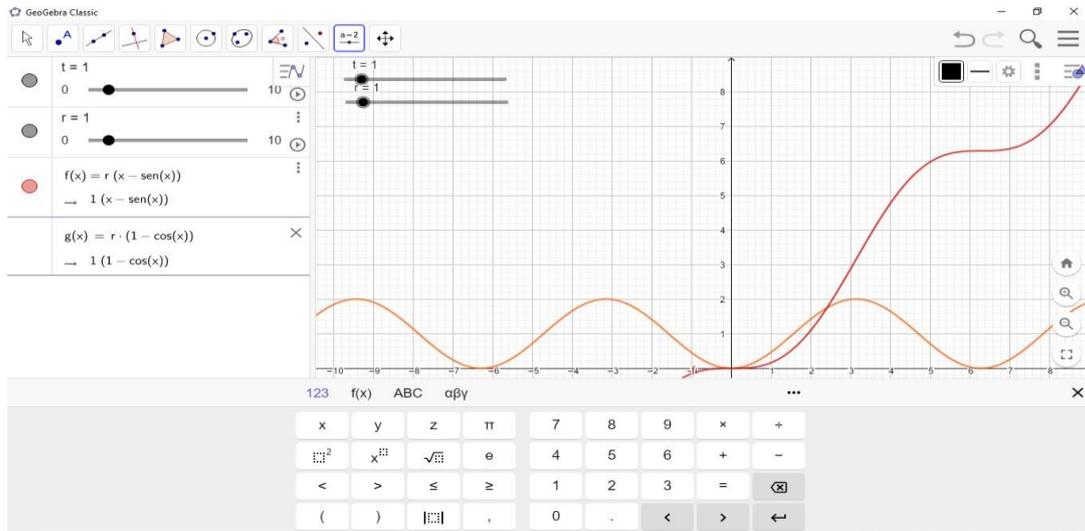


Fonte: Autores.

À esquerda da tela tem-se a listagem de todos os objetos criados respectivamente e, logo abaixo dos controles deslizantes, um campo de entrada onde é possível criar pontos, funções, curvas, etc.

No campo de entrada, define-se duas funções que são a parametrização da cicloide. A dedução destas funções, estão contidas no capítulo seguinte, pois uma vez que esteja compreendido o comportamento da curva, torna-se mais fácil definir seus parâmetros. Portanto, digita-se as funções  $f(x) = r * (x - \text{sen}(x))$ ,  $g(x) = r * (1 - \text{cos}(x))$  e conclui-se pressionando ENTER.

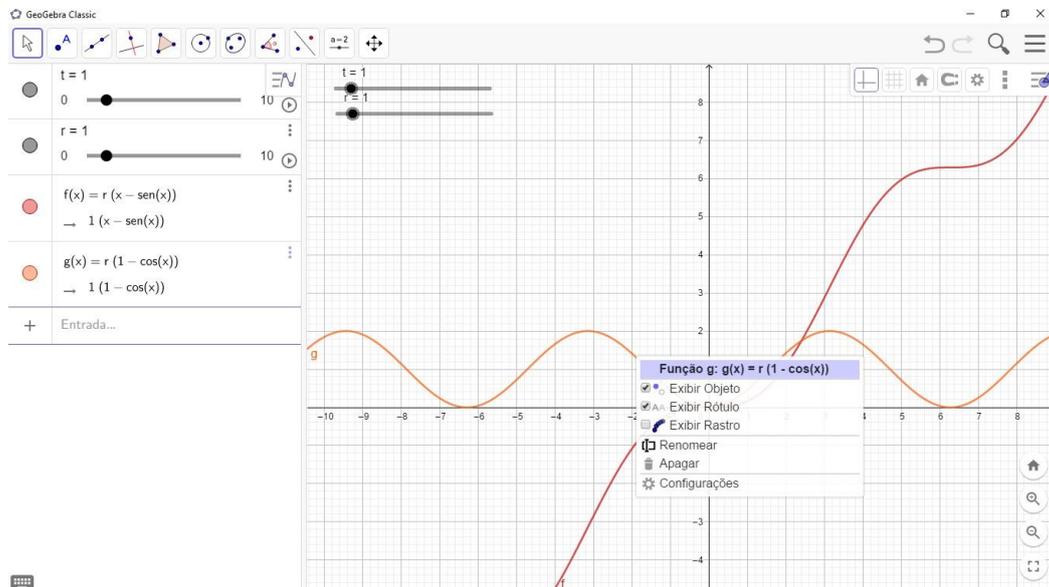
**Figura 6 – Inserção das Funções.**



Fonte: Autores.

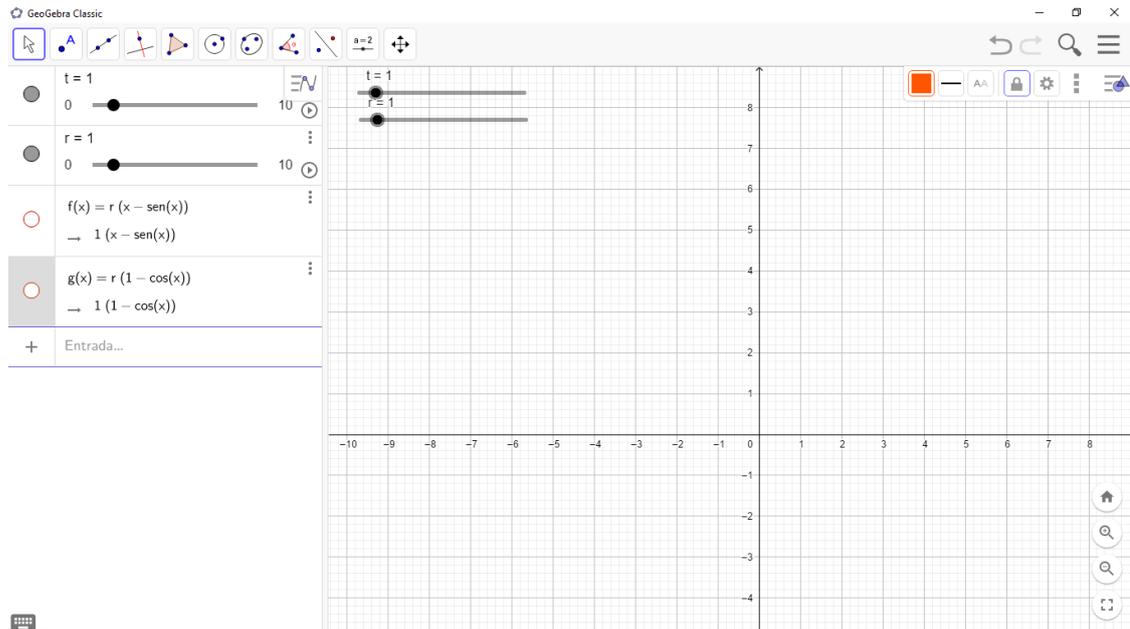
Por uma questão estética e melhor visualização, escondeu-se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$ . Para isso há dois caminhos: clicando no círculo que leva a cor atribuída a cada uma delas no gráfico, ou clicando com o botão direito sobre a função no plano cartesiano e desmarcando a caixa EXIBIR OBJETO.

**Figura 7 – Não exibir gráfico das funções.**



Fonte: Autores.

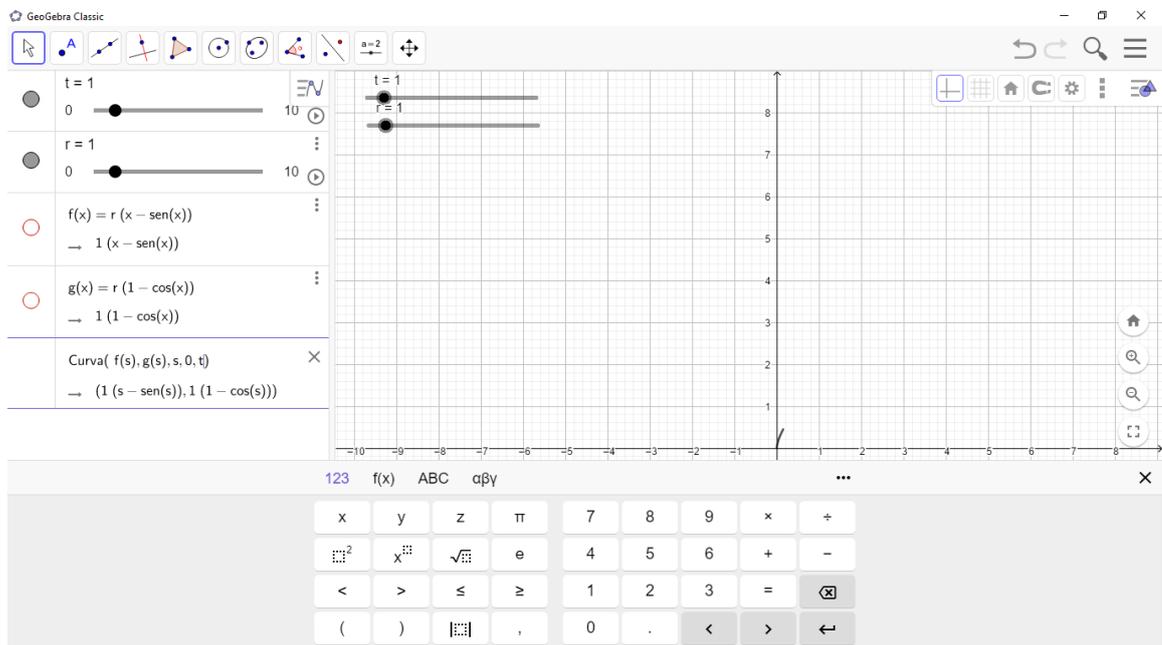
**Figura 8 – Funções definidas, mas não exibidas.**



Fonte: Autores.

O último passo dessa construção, é a criação da curva. Para criá-la basta digitar curva no campo de entrada e escolher a opção Curva (<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>). Após selecionar esta opção, preenche-se cada um dos campos. A primeira <Expressão> deve ser definida como  $f(s)$ , a segunda como  $g(s)$ , por isso, a variável também deve ser  $s$ , e o valor inicial e final devem ser 0 e  $t$ , respectivamente.

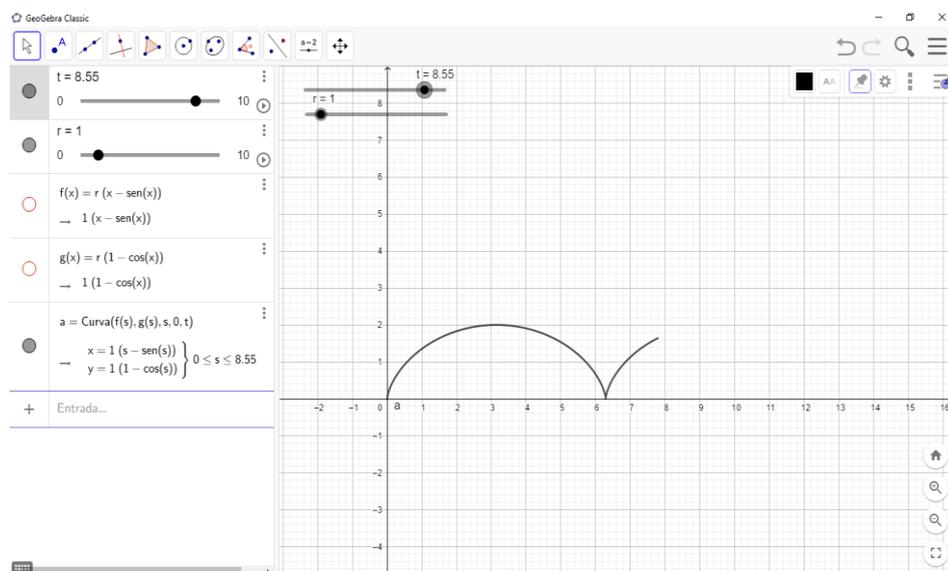
**Figura 9 – Inserção da Curva.**



Fonte: Autores.

Nesse ponto, com o cursor do mouse é possível mover o controle deslizante  $t$  e observar que a curva cicloide já está construída.

**Figura 10 – Visualização do comportamento da curva.**

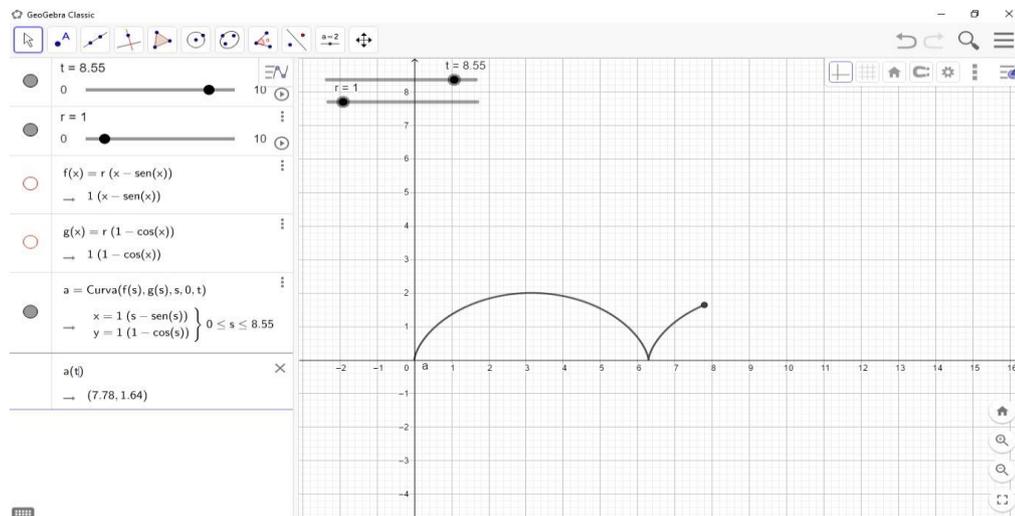


Fonte: Autores.

No entanto, para que se prossiga para a parametrização, é ideal que se definam mais alguns detalhes nesta curva. Um deles é a determinação de um ponto  $P$  que siga a mesma trajetória da cicloide. O ponto  $P$  é importante, pois as definições

dos parâmetros da braquistócrona vêm justamente do estudo da variação das coordenadas  $x$  e  $y$  deste ponto. Assim, no campo de entrada digita-se:  $a(t)$ .

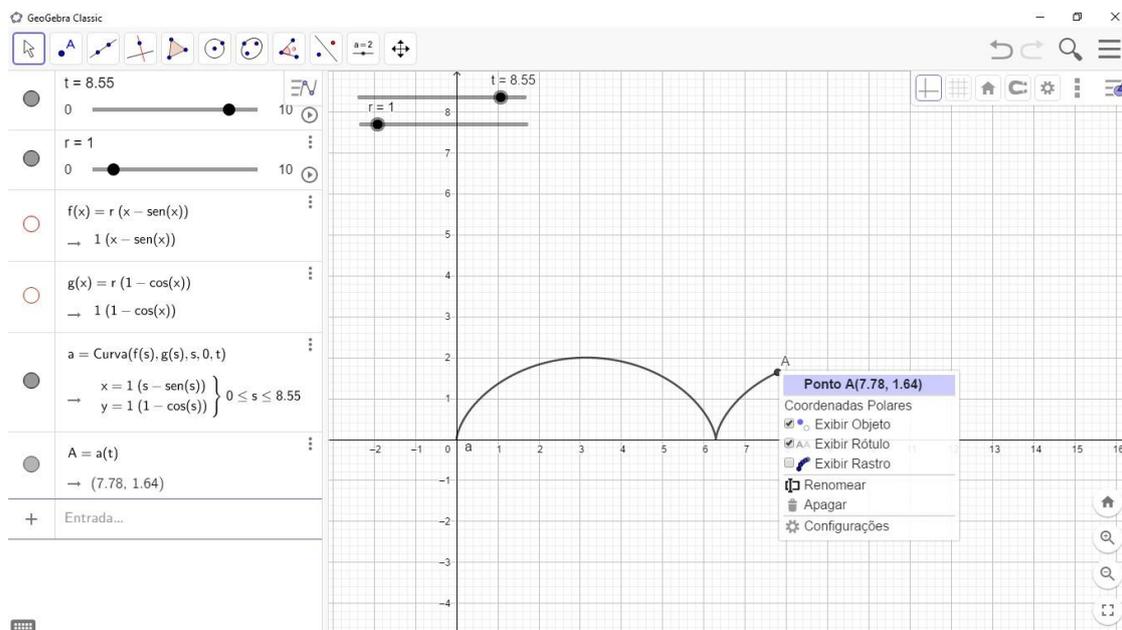
**Figura 11** – Definir o ponto P.



Fonte: Autores.

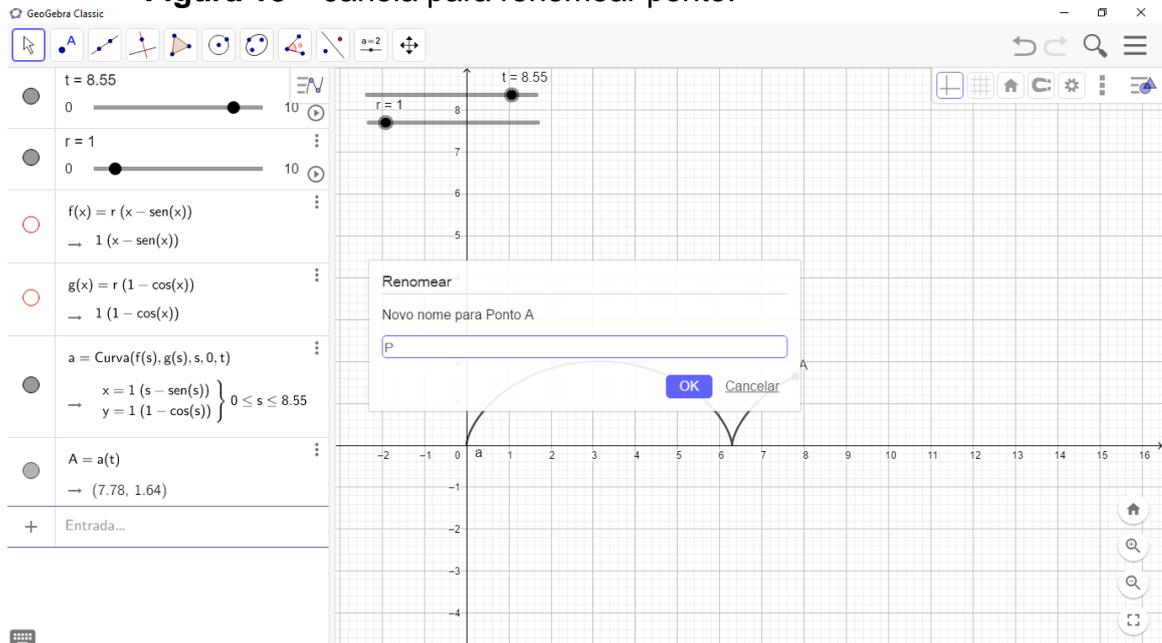
Automaticamente o software criará um ponto A, contudo clicando com o botão direito do mouse sobre ele, é possível renomeá-lo para P.

**Figura 12** – Renomear ponto.



Fonte: Autores.

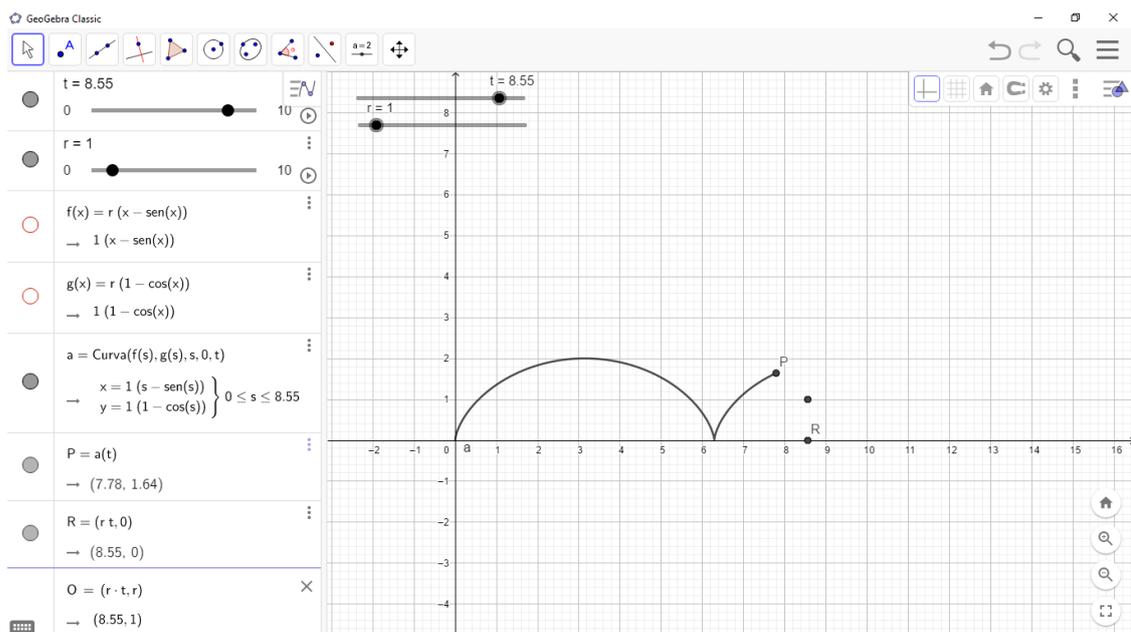
**Figura 13 – Janela para renomear ponto.**



Fonte: Autores.

Semelhantemente ao passo anterior, cria-se dois outros pontos R e O de coordenadas  $(rt, 0)$  e  $(rt, r)$ , respectivamente. Para tanto, no campo de entrada digita-se  $R=(r \cdot t, 0)$  e após isso  $O=(r \cdot t, r)$ .

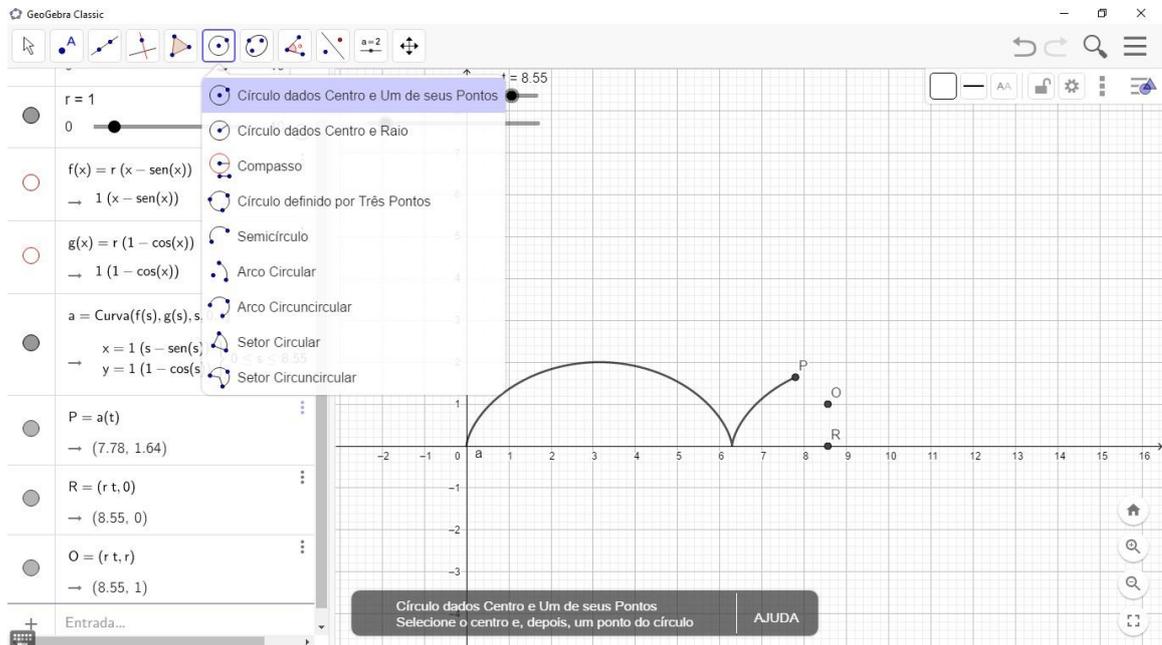
**Figura 14 – Criar pontos O e R.**



Fonte: Autores.

Por fim, cria-se uma circunferência de centro O e raio  $\overline{OR}$ . No menu

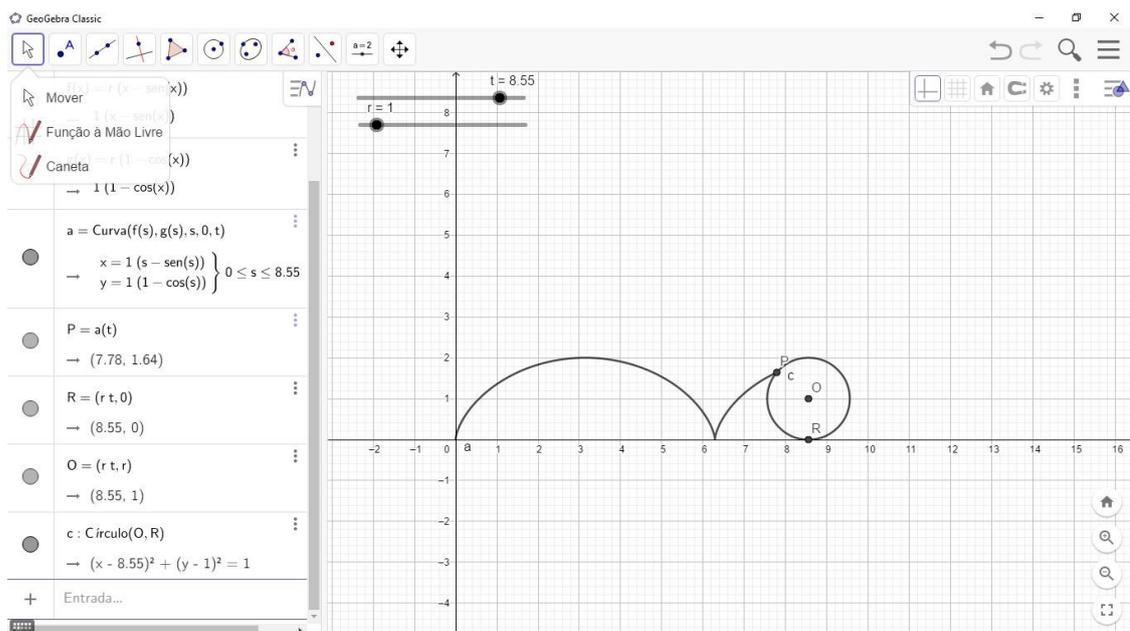
**Figura 15** – Localização da ferramenta circunferência dados centro e um de seus pontos.



Fonte: Autores.

Selecionando Círculo e dados os Centro e Um de seus Pontos, basta clicar no ponto O e no ponto R, respectivamente para que a circunferência seja criada.

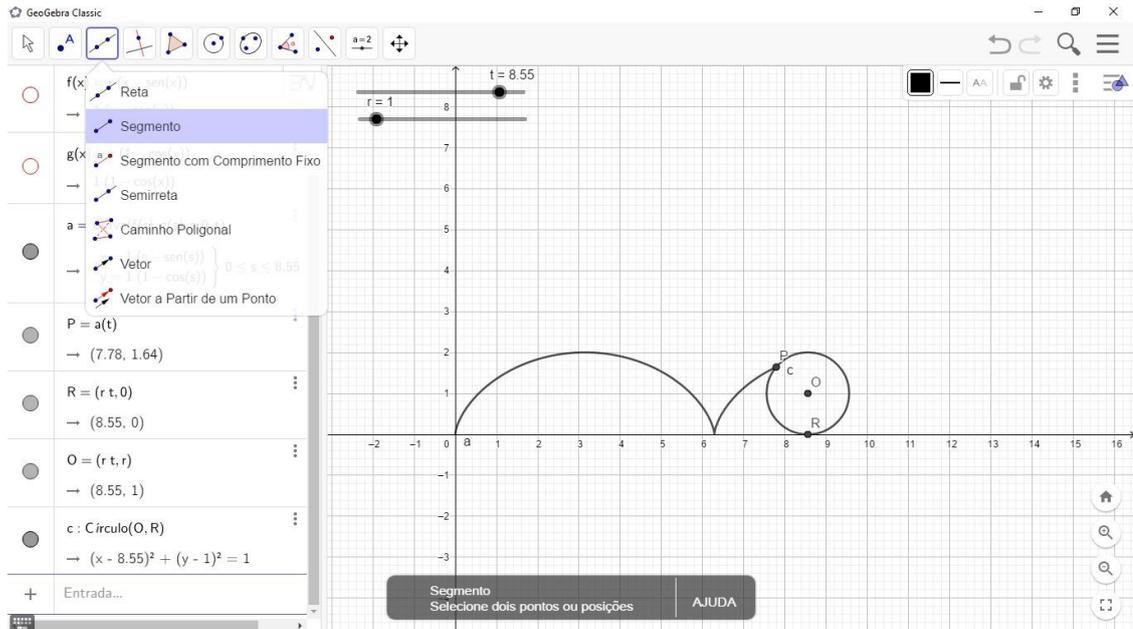
**Figura 16** – Criar Circunferência.



Fonte: Autores.

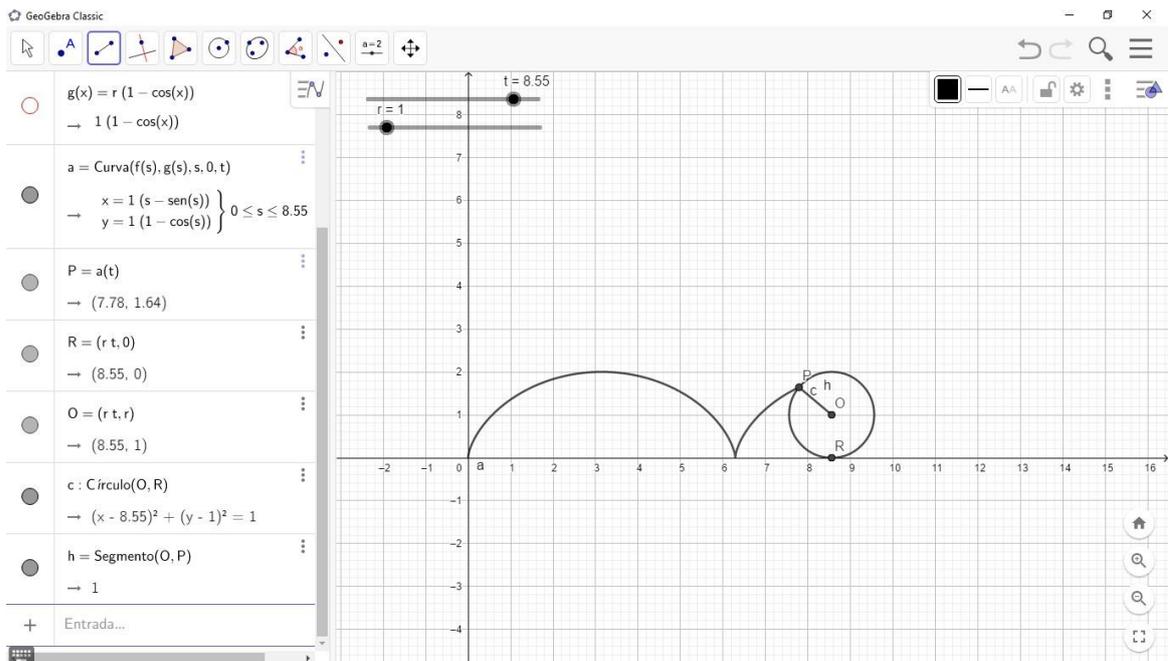
Ressalta-se que os pontos P e R, pertencem a circunferência, logo é possível traçar o seu raio OP. No terceiro botão do menu de ferramentas, seleciona-se segmento e conforme feito na criação da circunferência, basta clicar nos pontos O e P.

**Figura 17 – Localização da ferramenta Segmento.**



Fonte: Autores.

**Figura 18 – Criar raio  $\overline{OP}$ .**

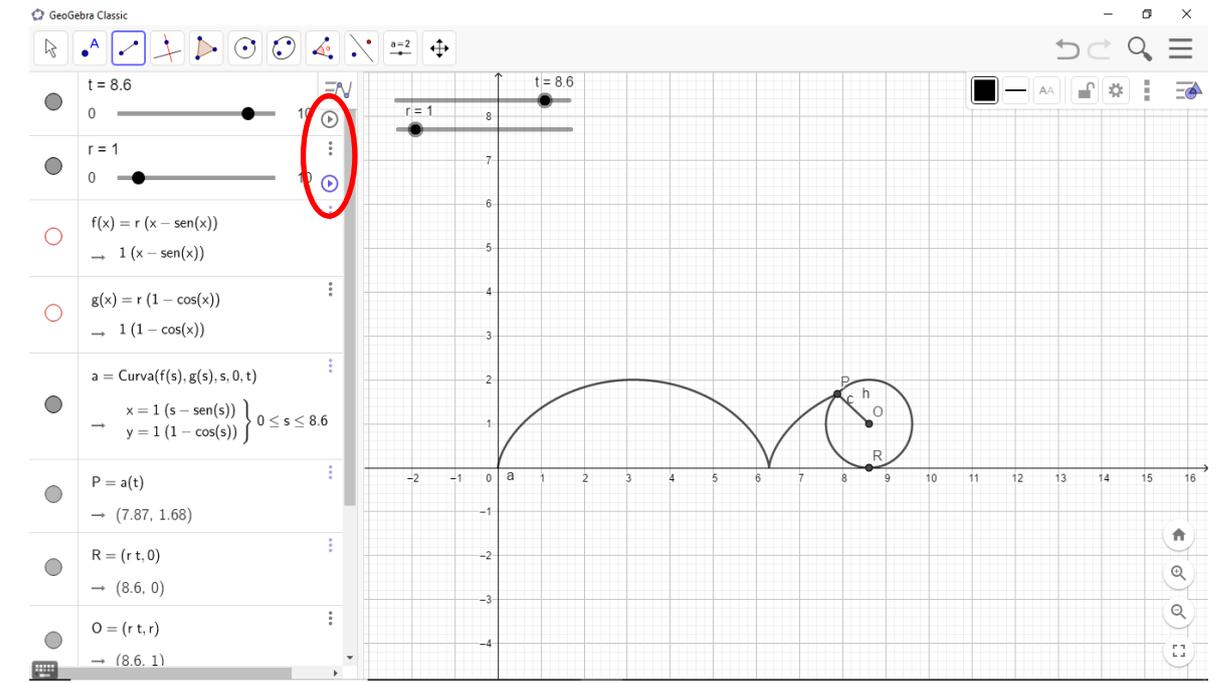


Fonte: Autores.

Por fim, valendo-se do recurso do controle deslizante é possível variar

o raio da circunferência através do controle deslizante  $r$ , bem como observar o comportamento da curva cicloide no controle deslizante  $t$ . Para animá-los, basta ir à listagem dos objetos criados, e no controle deslizante  $t$  ou  $r$  há um botão PLAY. Apenas com um clique sobre ele, tem-se a animação da curva, e a animação do raio.

**Figura 19** - Visualizar o comportamento da circunferência.



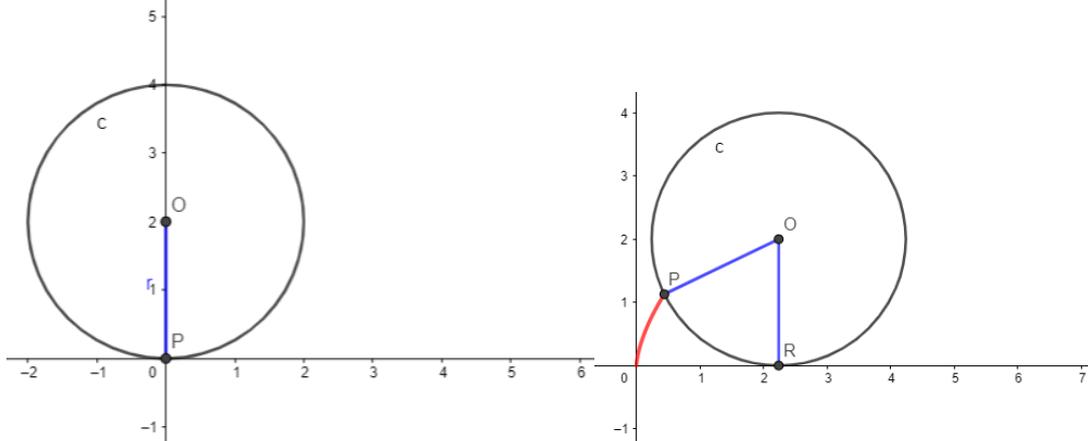
Fonte: Autores.

Após o término de todas as etapas da construção da Curva Cicloide no GeoGebra, o usuário do software terá a sua frente a própria curva em que Galileu Galilei viu da janela de sua casa, ao observar a roda de uma carroça que passava em frente a sua janela e, após essa observação, ele relatou em uma carta enviada a um de seus discípulos, o físico matemático Cavalieri em 1640, Galileu descreveu a curva como: “uma curva com graciosa curvatura” (VEGA e SASSINE, 2011).

## 4 PARAMETRIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA ATRAVÉS DA TRIGONOMETRIA

Sousa Júnior (2010) define cicloide da seguinte maneira: “Seja  $C$  uma circunferência de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $C$ . Denominamos cicloide à curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $C$  rola sobre a reta  $s$ , sem deslizar.”

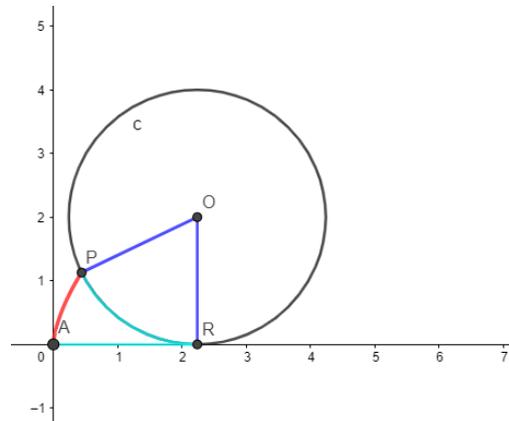
**Figura 20** – Cicloide e a circunferência.



Fonte: Autores.

Considerou-se A um ponto sobre a origem (0,0) e R o ponto de intersecção entre a circunferência c e a reta s. Ao passo que c rola sobre s sem deslizar, a medida do arco  $\widehat{PR}$  é exatamente a mesma do segmento  $\overline{AR}$ . Portanto, é notório que ao completar uma volta, a medida do segmento  $\overline{AR}$  será de  $2 \cdot \pi \cdot r$ .

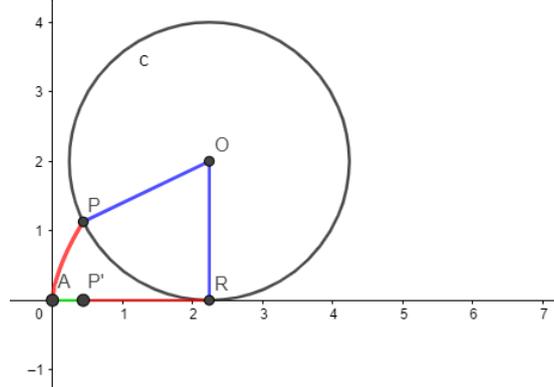
**Figura 21** – Arco da circunferência e o eixo x.



Fonte: Autores.

Uma vez que a braquistócrona é dada pela trajetória percorrida pelo ponto P, fez-se sua parametrização através da definição das coordenadas x e y deste ponto. Definiu-se, pois, o ponto P' como o translado de P no eixo das abscissas. Sendo assim, a coordenada x do ponto P é dada por:  $x = \overline{AR} - \overline{P'R}$

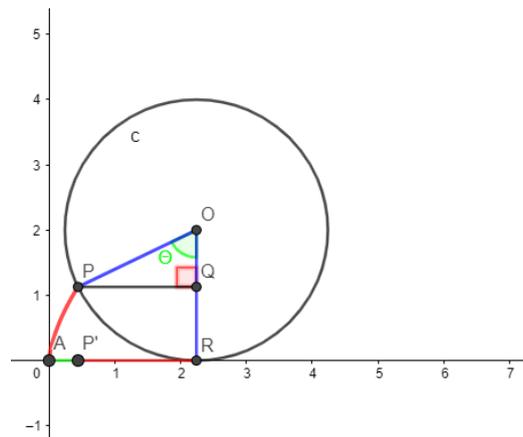
**Figura 22** – Definição do ponto P'.



Fonte: Autores.

Para definirmos a coordenada  $y$ , considerou-se o ângulo  $\Theta = P\hat{O}R$  e o triângulo  $POQ$ , em que  $Q$  é o ponto de intersecção entre o segmento  $\overline{PQ}$  e  $\overline{OR}$ , perpendiculares entre si.

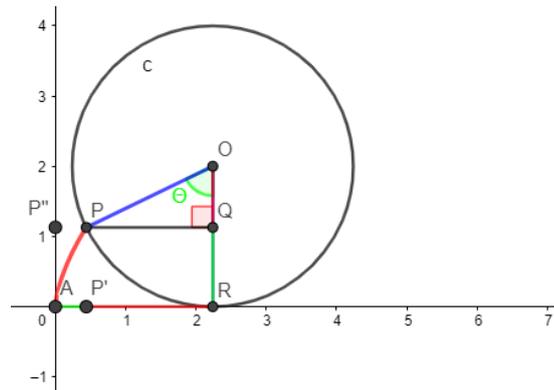
**Figura 23** – O triângulo retângulo  $OQP$ .



Fonte: Autores.

Analogamente ao procedimento anterior, denominou-se  $P''$  o translado de  $P$  no eixo das ordenadas. Nesse sentido, a coordenada  $y$  do ponto  $P$  é dada por:  $y = \overline{OR} - \overline{OQ}$ .

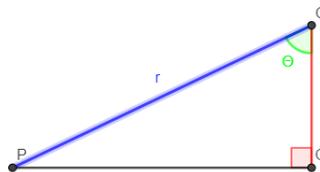
**Figura 24** – Definição do ponto P”.



Fonte: Autores.

Partindo dessas equações iniciais, importou escrever os segmentos nela apontados em função do raio  $r$ , e para tanto utilizou-se das relações trigonométricas presentes no triângulo retângulo POQ.

**Figura 25** – Relações trigonométricas no triângulo POQ.



Fonte: Autores.

$$\sin(\theta) = \frac{OQ}{OP}$$

$$\sin(\theta) = \frac{h}{r}$$

$$\cos(\theta) = \frac{PQ}{OP}$$

$$\cos(\theta) = \frac{OQ}{r}$$

$$r \cdot \sin(\theta) = \overline{OQ}$$

$$r \cdot \cos(\theta) = \overline{PQ}$$

Sabendo que o arco  $\widehat{PR}$  tem mesma medida do segmento  $\overline{AR}$ , é possível calcular, por meio de uma regra de três simples, a medida do arco, para então termos a medida do segmento.

$$\begin{aligned} 2\pi &\rightarrow 2\pi r \\ \theta &\rightarrow \overline{PR} \\ 2\pi \overline{PR} &= \theta 2\pi r \\ \overline{PR} &= \theta r = \overline{AR} \end{aligned}$$

Observando que o segmento  $\overline{OR}$  também é raio da circunferência  $c$ , substituiu-se-os nas equações iniciais, fatorando-as a fim de que o raio  $r$  seja fator

$$x = \overline{AR} - \overline{P'Q}$$

$$x = \theta r - r \cdot \sin(\theta)$$

$$x = r \cdot [\theta - \sin(\theta)]$$

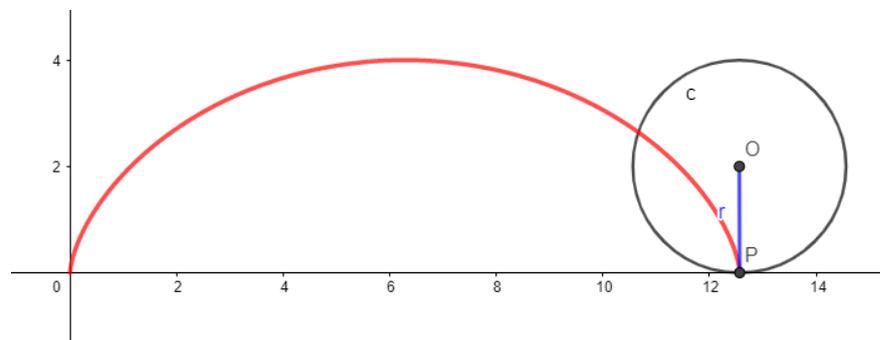
$$y = \overline{OR} - \overline{OQ}$$

$$y = r - r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot [1 - \cos(\theta)]$$

Conclui-se, pois, que as coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto  $P$  que definem a curva braquistócrona são:  $x = r \cdot [\theta - \sin(\theta)]$  e  $y = r \cdot [1 - \cos(\theta)]$ , conforme a figura a seguir:

**Figura 26** – Curva cicloide parametrizada.



Fonte: Autores.

Através dessas coordenadas obtém-se o trajeto de menor período de tempo que um corpo leva para deslocar-se de um ponto  $A$  até  $B$  em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.

## 5 PARAMETRIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA POR MEIO DO CÁLCULO DE VARIÁÇÕES

O estudo do cálculo variacional foi de grande importância para os físicos-matemáticos do início do século XVIII, dentre eles se destacaram Euler e Lagrange que se interessaram pelo problema da Braquistócrona, que outrora já tinha sido solucionado por outras ferramentas matemáticas, e o resolveram por meio do cálculo de variações.

A seguir, será apresentada a dedução da equação de Euler-Lagrange na resolução do problema proposto por Bernoulli em 1682.

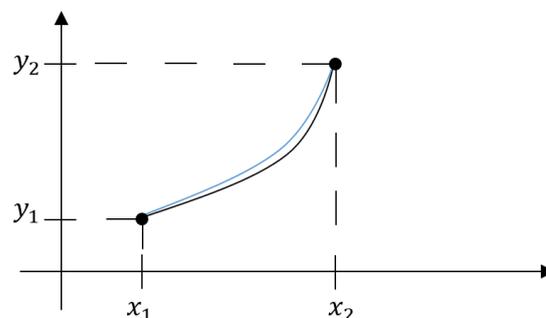
Baseada no cálculo variacional, uma das ferramentas cruciais para a resolução do problema da Braquistócrona é a equação de Euler-Lagrange. A obtenção dessa equação, auxiliou na lei de determinação da configuração de um sistema que torna o valor de uma integral o menor valor possível, sendo este também, a essência do princípio variacional. Para a dedução deste problema, considere a seguinte integral cujo integrando é uma função de três variáveis:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx \quad (1)$$

- i)  $y(x) \rightarrow$  uma função
- ii)  $y'(x) \rightarrow$  sua derivada de primeira ordem
- iii)  $x \rightarrow$  variável independente

O objetivo será encontrar o  $y(x)$  que faça  $S$  ser estacionária, ou seja, a função na qual uma pequena alteração em  $x$  não altera o valor da sua derivada de primeira ordem (conforme o teorema de Taylor). Com isso, transforma-se esse problema em algo mais familiar e mais simples de resolver, isto é, torna-se um problema de cálculo elementar.

**Figura 27** – Plano Cartesiano que contém duas funções, sendo uma multiplicada por um valor real.



**Fonte:** Autores.

Observando a figura 27 tem-se duas funções. A primeira,  $y = y(x)$  (curva preta), será supostamente a curva solução do problema, e a outra  $\omega(x)$  (curva

$Y(x)$ :

$$Y(x) = y(x) + \alpha\omega(x) \quad (2)$$

De modo que se  $\alpha = 0$ , tende-se a ter uma função que é a resolução do problema. Ao substituir a equação (2) em (1) obtém-se:

$$S(\alpha) = \int_1^2 f[Y(x), Y'(x), x] dx \quad (3)$$

Euler impôs que  $\frac{ds}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0$ , e apropriando-se da regra da cadeia, integrando (3) conforme cada um dos seus argumentos em relação a  $\alpha$ , pode-se escrever que:

$$\frac{ds}{d\alpha_{\alpha=0}} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \left( \frac{d\omega}{d\alpha} \right) + 0 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \omega(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \omega'(x) \right] dx = 0$$

$$\frac{ds}{d\alpha_{\alpha=0}} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \omega(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \omega'(x) \right] dx = 0 \quad (4)$$

Ao observar a parcela  $\int \frac{\partial f}{\partial y'} \omega'(x) dx$ , e para solucionar o próximo passo Euler quis “se livrar” de  $\omega'(x)$ , para isso, utilizou do cálculo elementar para fazer a integração por partes da seguinte forma:

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$dv = \omega'(x) dx$$

Obtendo a seguinte resolução:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \omega(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \omega(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx \quad (5)$$

Sabe-se que  $\omega(x)$  no ponto  $x_1$  e no ponto  $x_2$  valem 0, pois eles são os extremos, logo,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \omega(x) \right|_{x_1}^{x_2} = 0$ , resultando na seguinte expressão:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \omega(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx \quad (6)$$

Após a obtenção da expressão (6), vamos analisá-la em (4):

$$\frac{ds}{d\alpha} (\alpha = 0) = \int_{x_1}^{x_2} \omega(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 \quad (7)$$

A expressão (7) deve ser verdade para qualquer  $\omega(x)$  que seja nula nos dois extremos, isso implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (8)$$

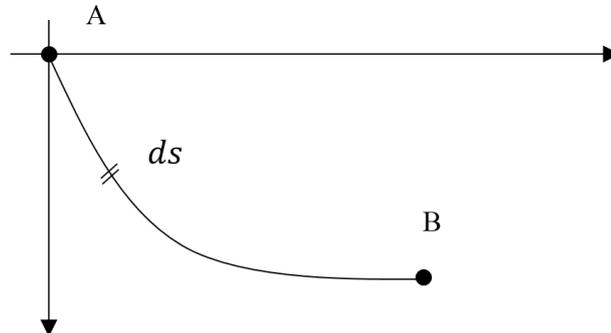
A expressão anterior (8) é conhecida como a fórmula de Euler-Lagrange, e também, a solução para o problema inicialmente proposto. Ela é a lei de determinação da configuração de um sistema, que torna o valor de uma certa integral o menor possível.

## 5.2 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

A problematização envolvida, era enunciada da seguinte forma: “Seja uma partícula abandonada a partir do repouso passando pelo ponto A até B, pertencentes a um plano vertical, qual será a trajetória do móvel ao longo do qual estará sob a ação do seu próprio peso? Qual será o tempo mais curto para que isso aconteça?” (VEGA e SASSINE, 2011).

Para facilitar a visualização e compreensão do assunto, por convenção, se estabelece o eixo das ordenadas orientado para baixo. A imagem a seguir nos exemplifica o que foi proposto por Bernoulli.

**Figura 28** - A partícula será abandonada no ponto A e percorrerá até o ponto B, finalizando a sua trajetória.



Fonte: Autores.

O corpo estará sujeito a velocidade  $v$ , e para determinar qual o tempo mais curto em que será feita a trajetória, temos que, a taxa de variação instantânea será a seguinte:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \therefore v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

em que,  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

Por meio de algumas operações algébricas conclui-se que:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} = \frac{\left( \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \right) dy}{v} \quad (9)$$

Uma vez que a única força a atuar sobre o corpo é a gravidade, pode-se considerar o sistema conservativo (SC), isto é, a Energia Mecânica ( $E_m$ ) é a mesma em qualquer ponto da trajetória, sendo assim

$$E_{mA} = \dots = E_{mi} = \dots = E_{mB} .$$

E o valor da Energia Mecânica em certo ponto é dado pela soma de sua Energia Potencial ( $E_p$ ) e sua Energia Cinética ( $E_c$ ), em que  $mgh$  é Energia Potencial e  $\frac{1}{2}mv^2$  é energia cinética ( $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ ).

Então, para o nosso sistema temos a seguinte relação - lembrando que a partícula sai do ponto A (inicial) e vai para B (final):

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

Como a partícula irá partir do repouso no momento inicial, ponto A tem  $v_i = 0$ . E ao chegar no ponto B,  $h_f = 0$ . Assim, obtem-se a seguinte expressão:

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$mgh_i - \frac{1}{2}mv_f^2 = 0$$

Ao colocar  $v$  em evidência:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Se a altura está no eixo das ordenadas, logo  $h = y$ , nos levando a obter o seguinte valor de  $v$ :

$$v = \sqrt{2gy} \quad (10)$$

Substituindo (II) em (I) obtemos:

$$dt = \frac{\left( \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \right) dy}{\sqrt{2gy}}$$

Lembrando que  $x' = \frac{dx}{dy}$ .

$$\Delta t = \int \frac{(\sqrt{x'^2 + 1})dy}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{(\sqrt{x'^2 + 1})dy}{\sqrt{y}} \quad (11)$$

Vale ressaltar que neste trabalho utilizou-se  $y$  em função de  $x$  [ $x(y)$ ]. Ao analisar o integrando de (11), vê-se que obedece a fórmula de Euler-Lagrange (12).

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0 \quad (12)$$

Comparando cada um dos elementos, vem:

$$\text{iv) } \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\text{v) } \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\text{vi) } \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0$$

Sendo assim, no item (iv),  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , pois este não apresenta  $x$  como

variável. Contudo, para que, no item (vi),  $\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0$  ocorra, é necessário que  $\frac{\partial f}{\partial x'} =$

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} = c, \text{ onde } c \text{ é uma constante, e } \frac{d}{dy}(c) = 0 \rightarrow \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} = c \quad (13)$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado obtém-se:

$$\frac{x'^2}{1+x'^2} \frac{1}{y} = c^2 \quad (14)$$

Por conveniência, a constante  $c^2$  será substituída por  $\frac{1}{2a}$ .

$$\frac{x'^2}{1+x'^2} \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$2a(x'^2) = y(1+x'^2)$$

$$(2a-y)x'^2 = y$$

$$x'^2 = \frac{y}{2a-y}$$

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

$$x = \int \left( \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \right) dy \quad (15)$$

Fazendo a mudança de variáveis cartesianas para variáveis polares e realizando a substituição trigonométrica:

$$y = a(1 - \cos \theta) \rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \rightarrow dy = a \sin \theta d\theta$$

vem:

$$x = \int \left( \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{2a - a(1 - \cos \theta)}} \right) a \sin \theta d\theta = \int \left( \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} \right) a \sin \theta d\theta =$$

$$\int \left( \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}} \right) a \sin \theta d\theta = a \int (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$x(\theta) = a\theta - a \sin \theta \quad (16)$$

A função (8) é a forma paramétrica da curva entre os pontos A e B, uma curva chamada cicloide que também pode ser chamada de Braquistócrona, Isócrona e Tautócrona.

## 6.3 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

A solução do problema da tautócrona – ou cicloide invertida - era apresentado da seguinte forma: “em uma cicloide, o tempo que um corpo leva para atingir o ponto mínimo independe da altura em que foi lançado” (VEGA e SASSINE, 2011).

Considere o tempo de queda do corpo pela cicloide entre os pontos  $(0,0)$  e  $(x(\pi), y(\pi))$ .

Considere a cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{k^2}{2}(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = -\frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Analogamente aos passos realizados para a solução anterior do item 5.2, o tempo de queda do corpo pela cicloide entre os pontos  $(0,0)$  e  $(x(\pi), y(\pi))$ , é obtido por:

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}{-2gy(\theta)}} d\theta \leftrightarrow t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\frac{k^4}{2}(1 - \cos \theta)}{2g \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta)}} d\theta \leftrightarrow$$

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{k^2}{2g}} d\theta \leftrightarrow t = \sqrt{\frac{k^2}{2g}} \pi$$

Logo,

$$t = \sqrt{\frac{k^2}{2g}} \pi \quad (17)$$

Assim (17) é o tempo de percurso entre os pontos  $(0,0)$  e  $(x(\pi), y(\pi))$ , com largada em  $(0,0)$ .

Agora iremos utilizar as seguintes igualdades trigonométricas:

$$\begin{cases} 1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos(\theta) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \end{cases}$$

E pode-se concluir que:

$$t = \sqrt{\frac{k^2}{2g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \leftrightarrow t$$

$$= \sqrt{\frac{k^2}{2g}} (-2 \operatorname{arctan}(0) + 2 \operatorname{arctan}(+\infty)) \leftrightarrow t = \sqrt{\frac{k^2}{2g}} \pi \quad (18)$$

Conclui-se em (18) o tempo de percurso entre os pontos  $(0,0)$  e  $(x(\pi), y(\pi))$ , largado em  $(x_0, y_0)$ .

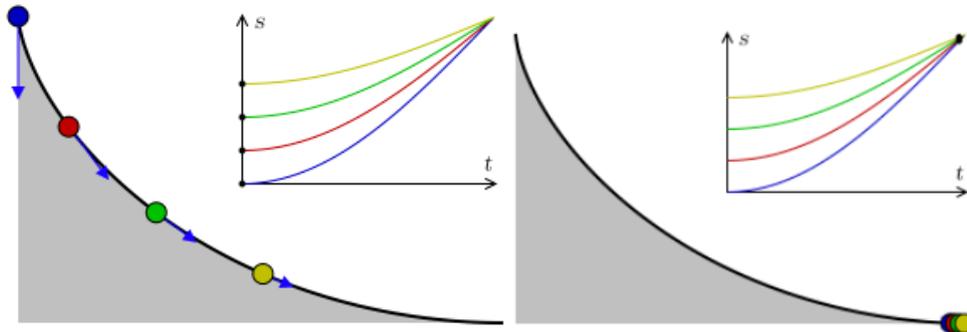
Analisando, (17) e (18) é possível definir a igualdade e concluir que independente de onde o corpo é solto na cicloide, o tempo que ela gasta para chegar no ponto mínimo será sempre o mesmo. O único fator que pode alterar o tempo de decaimento do corpo até o ponto mínimo é o raio da tautócrona.

## 6 EXPERIMENTO

Para consolidar os conceitos até então demonstrados, fez-se um experimento usando uma estrutura em madeira, conforme figura 29, visto que uma quantidade considerável de pessoas têm na geometria uma dificuldade demasiada de abstração. E, também será possível, a verificação de forma visual das propriedades tautócrona e braquistócrona da curva cicloide.

Como mencionado anteriormente, sabe-se que esta curva é o caminho mais rápido que um corpo pode percorrer apenas sob influência da aceleração da gravidade, e que o tempo em que o corpo atingirá o ponto mais baixo, será o mais curto. Se lançarmos simultaneamente dois corpos, partindo do repouso e de pontos diferentes, apenas sob ação da gravidade, a curva descreverá o trajeto que, independe do ponto inicial, ambos os corpos chegarão no ponto mais baixo da curva ao mesmo tempo, descrevendo a propriedade tautócrona da cicloide, como demonstrado através do cálculo variacional na última seção.

**Figura 29** – Trajetória da cicloide com diferentes corpos, esquematisando a propriedade tautócrona.

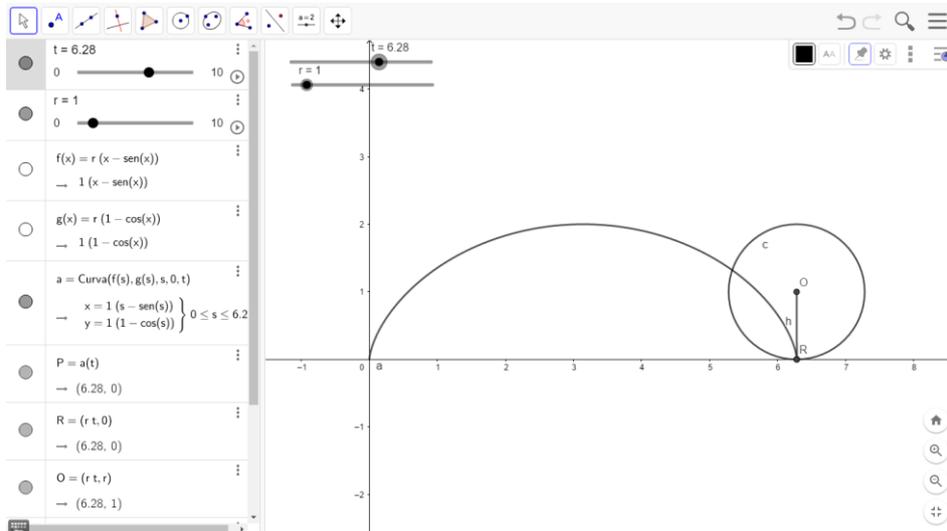


Fonte: Google.

Para mostrar que a cicloide é realmente a curva que gera o menor tempo de percurso, optou-se por construir 3 curvas no intuito de compará-las. Para isso, aprouve usar os parâmetros e perfis desenvolvidos anteriormente neste trabalho, para produção das rampas em MDF (Medium-Density Fiberboard).

Inicia-se retornando ao Geogebra, onde a curva que é objeto de estudo deste trabalho foi parametrizada, e atribuiremos o valor 1 para o controle deslizante  $r$  e 6,28 para o controle deslizante  $t$ .

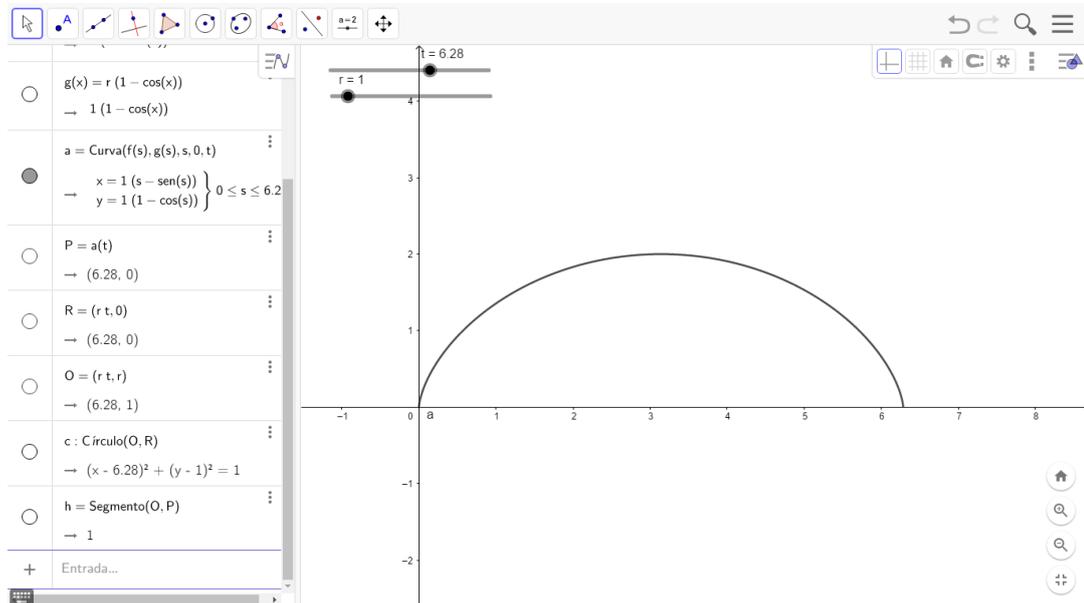
**Figura 30** – Retomando parametrização no geogebra.



Fonte: Autores.

Conforme feito anteriormente, deixou-se de exibir a circunferência  $c$ , os pontos  $O$ ,  $P$  e  $R$ , e o raio  $\overline{OR}$  para que se tenha destaque apenas a cicloide e então possa se efetuar o *print screen*.

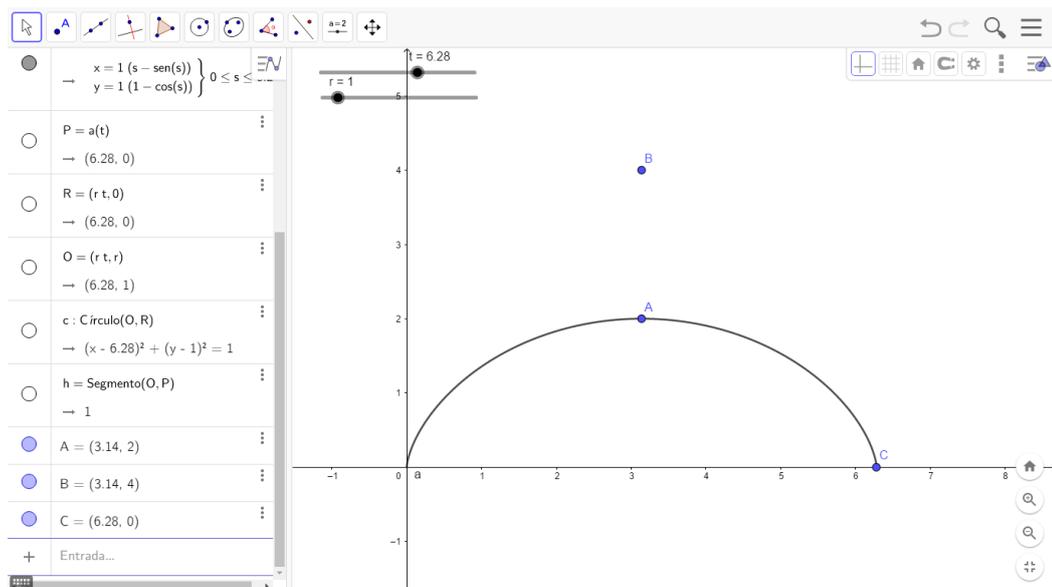
**Figura 31 – Destacando ciclóide.**



Fonte: Autores.

Para efeitos de comparação, escolheu-se a hipérbole como possível candidata à resolução do problema proposto por Gottfried Leibniz, e para traçá-la no *software*, deve-se primeiro criar os pontos A, B e C de coordenadas (3.14,2), (3.14, 4) e (6.28, 0) respectivamente, digitando os pares ordenadas na aba “Entrada...”.

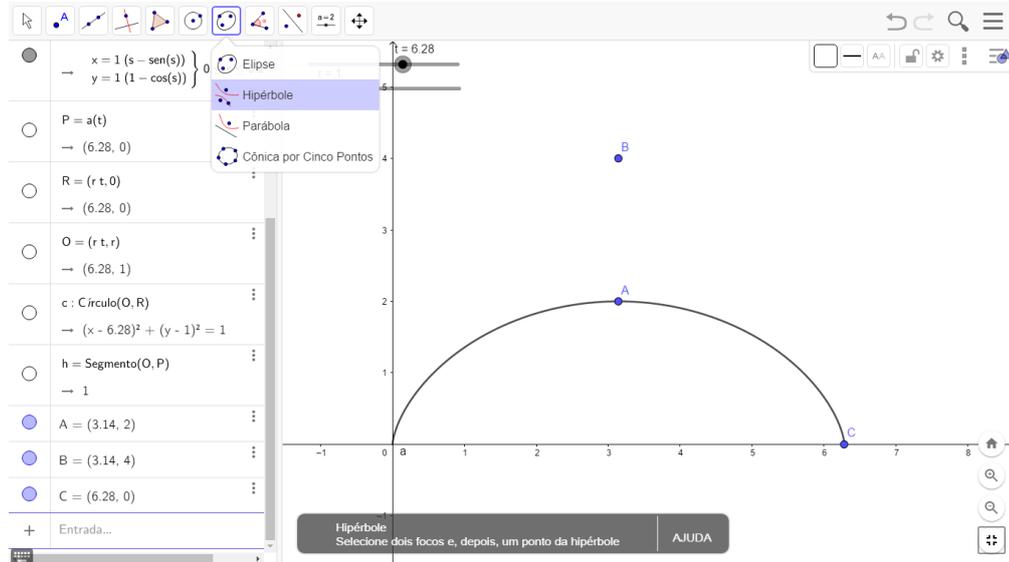
**Figura 32 – Criando os focos e pontos pertencentes a hipérbole.**



Fonte: Autores.

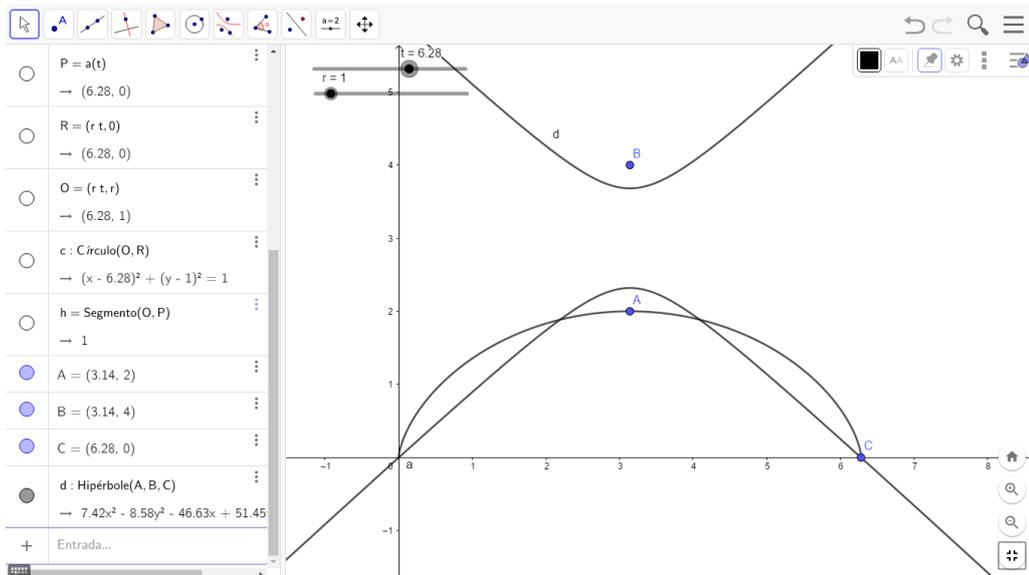
Na barra de ferramentas, tem-se no sétimo ícone a ferramenta necessária para construir cônicas. Nela seleciona-se a ferramenta 'hipérbole' para em seguida clicar nos pontos A, B e C, nesta ordem.

**Figura 33 – Selecionando da ferramenta Hipérbole**



Fonte: Autores.

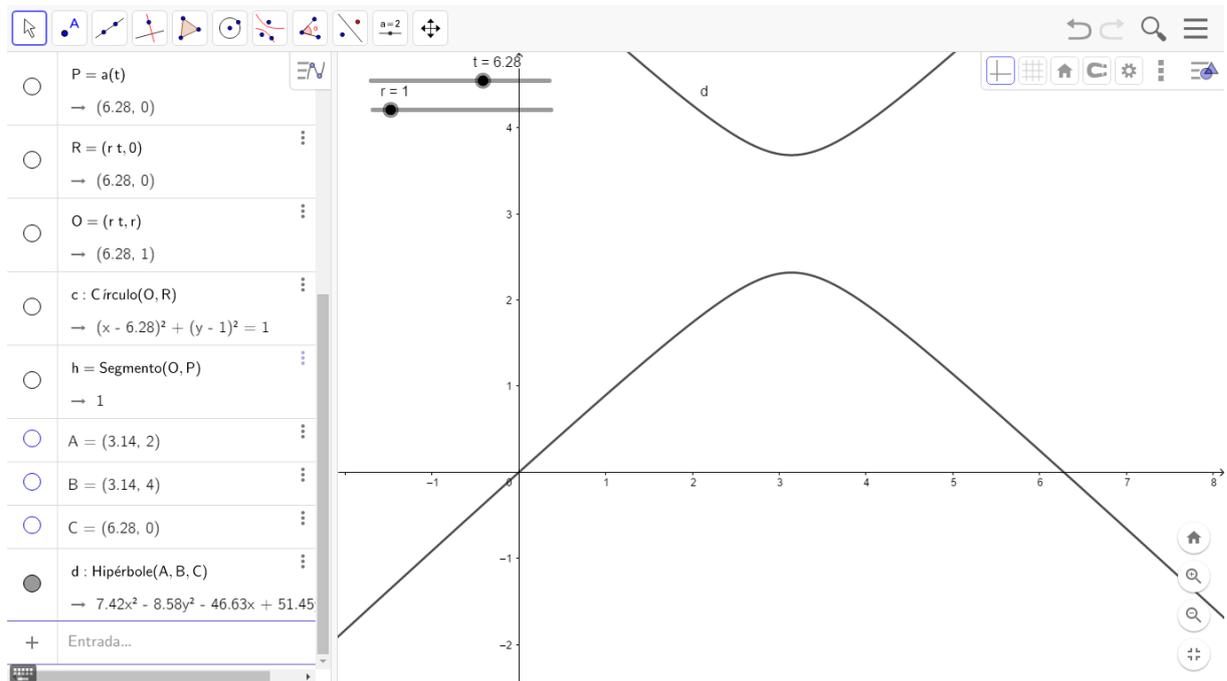
**Figura 34 – Traçando Hipérbole**



Fonte: Autores.

Tal como feito com a cicloide, deixou-se de exibir a curva a, os pontos A, B e C a fim de que se tenha destaque apenas a cicloide e então possa se efetuar o *print screen*.

**Figura 35 – Destacando Hipérbole.**



**Fonte:** Autores.

Tendo construído a ciclóide e a hipérbole, procurou-se uma empresa especializada em corte de MDF a laser, para que se obtivesse um bom resultado no corte das peças, a fim de diminuir o atrito o máximo possível. Sendo assim, foram produzidas as peças da seguinte maneira:

**Figura 36 – Peças.**



**Fonte:** Autores.

Nota-se que dentre as peças cortadas existe a reta que, conforme mencionado e explanado anteriormente através de cálculos, apesar de ser a menor distância entre os pontos, não é o caminho mais rápido entre eles.

Além da reta e das curvas, foram feitas peças retangulares para servirem

de estrutura e apoio para as rampas. A montagem do experimento foi realizada de maneira prática e simplificada a fim de possibilitar que este possa ser efetuado com esferas de quaisquer diâmetro. Para tanto, optou-se por regular as rampas por meio de uma barra roscada e de um jogo de porcas no qual é possível ajustá-las à esfera escolhida para realização do experimento.

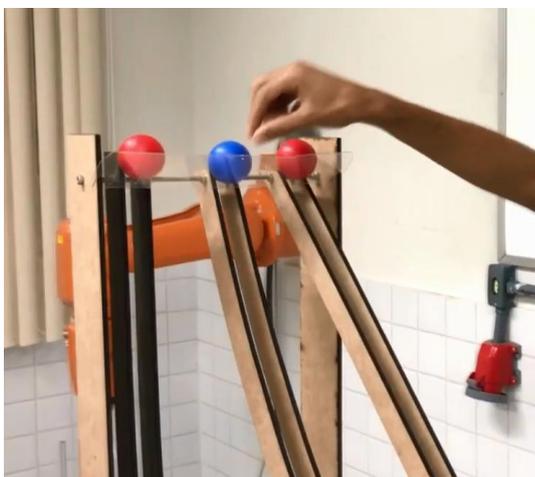
**Figura 37** - Montagem do experimento.



Fonte: Autores.

Os retângulos estruturais foram fixados a uma outra madeira por mão francesa, e um outro retângulo de acrílico foi colocado para conter as bolinhas no início e fim do experimento.

**Figura 38** – Peças de acrílico.



Fonte: Autores.

Depois de haver fixado os retângulos estruturais e os limitadores de início e fim do experimento, bem como ajustado a distância entre as curvas de acordo com o diâmetro da esfera utilizada, tem-se o resultado final da montagem:

**Figura 39** – Experimento montado.



**Fonte:** Autores.

Vale ressaltar que nessa descrição da construção das curvas, não foram sugeridas as dimensões para as mesmas. Isso se dá pela razão de que as máquinas de corte a laser podem ter áreas de superfície máxima distintas para realizar o corte. Entretanto, tendo a cicloide traçada, o profissional contratado redimensionará a curva a fim de que ela ocupe o maior espaço possível da superfície de corte.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A mitologia grega tem por uma de suas deusas a princesa Helena. Filha de Zeus e Leda, chamava atenção pela sua beleza incomparável. Esta foi apontada, inclusive, como uma das razões que levaram gregos e aqueus à Guerra de Tróia. E é por suas propriedades tão curiosas que levou autores a denominarem a curva cicloide como a “Helena das curvas” (NASCIMENTO, 2015) ou, de uma forma mais específica “Helena dos geômetras” (VEGA e SASSINE, 2011).

De fato, essa curva chama atenção pela beleza que revela em suas propriedades braquistócrona e tautócrona e permite que temas relacionados à Física e Matemática sejam trabalhados por meio dela ainda no século atual.

Acredita-se que muitos geômetras ainda vão estudar e alargar os horizontes tão abrangentes da curva cicloide e suas propriedades.

Pode-se encontrar soluções ligadas a essa curva, mais especificamente as curvas tautócrona e braquistócrona, quando um problema envolve uma trajetória de menor tempo. Basta olhar os foguetes que são lançados ao espaço, uma vez que: a trajetória de menor tempo proporciona, além de conforto e economia, uma sensação de “gravidade zero” aos tripulantes, pois quando se gasta menos tempo para uma trajetória, conseqüentemente o consumo de combustível é otimizado. Vale ressaltar que o veículo não precisa necessariamente ser um foguete ou um ônibus espacial, aviões de pequeno porte e, principalmente, aeronaves que querem proporcionar máximo conforto aos passageiros, utilizam dessas características da trajetória cicloidal – em forma de cicloide (VEGA e SASSINE, 2011).

Nas usinas hidroelétricas as cicloides são utilizadas para escoar água das represas quando atingem o nível máximo de capacidade, e por meio delas o escoamento é realizado em menos tempo possível, conseqüência da propriedade braquistócrona (VEGA e SASSINE, 2011). Sendo assim, é possível denotar o quanto a cicloide se apresenta como uma possível solução para diversos campos, como: Física de Partículas, Biologia, Matemática, Física, Tecnologia da Informação e outros campos da Ciências Exatas.

Considera-se então, que a abordagem do problema da braquistócrona no Ensino Médio é bastante pertinente. Visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) propõem temas transversais que trabalhem a interdisciplinaridade e contextualização, a abordagem da Helena das curvas seria uma excelente estratégia para esse fim.

Agora tomando uma abordagem mais aplicada da Matemática, pode-se perceber que não apenas esse problema da braquistócrona, mas muitos outros possuem inúmeras formas de resolução, sendo assim, para estudantes do Ensino Superior viriam à tona as diferentes formas de se solucionar um mesmo problema por caminhos diferentes, pela geometria, cálculo, trigonometria e etc.

Além disso, as tecnologias da informação são ferramentas importantes a serviço da educação e despertam grande interesse nos jovens. Logo, a elaboração de aulas em que se utilizem computadores e/ou celulares para a

construção da cicloide no GeoGebra, bem como aulas experimentais que apliquem conceitos que muitas vezes são vistos como inúteis e entediantes pelos alunos, pode fazer com que o interesse e rendimento deles sejam potencializados.

## REFERÊNCIAS

ACTA Euditorium. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/publications/journals/ActaEruditorum.html>. Acesso em 15 de abr. 2019.

BLOG SOFTWARE LIVRE NA EDUCACAO. *Geogebra*. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/soft-livre-edu/software-educacional-livre-na-wikipedia/geogebra/>. Disponível em: 21 mai. 2019.

BRAQUISTÓCRONA Experimento de Física. 2015. Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=IYMx\\_EI98I4](https://www.youtube.com/watch?v=IYMx_EI98I4). Acesso em 16 de abr. 2019.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. *Parametros Curriculares Nacionais/ Secretaria da Educação Fundamental*. – Brasília: MEC/SEF, 1997., p. 126.

CONSTRUÇÃO da curva Cicloide no Geogebra. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Xf4vcO8M0xw&t=4s>. Acesso em 16 de abr. 2019.

COSTA, Danielle Emerich; MOURA, Renato José. Braquistócrona e Tautócrona – Uma introdução ao estudo das curvas e do cálculo variacional. Universidade Federal de São Carlos. 2015.

CURVA Cicloide Parametrizada. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QYfeoUMfUzs>. Acesso em 16 de abr. 2019.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, USP, SP, 2003.

FERREIRA FILHO, Luís Gonzaga; ANDRADE, Marco Antonio de. *Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona*. 2015. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/82962625\\_Uma\\_abordagem\\_geometrica](https://www.researchgate.net/publication/82962625_Uma_abordagem_geometrica). Acesso em 15 de abr. de 2019.

GEOGEBRA (Software de Matemática Dinâmica). Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em 16 de abr. 2019.

MACHADO, Camila. *A Braquistócrona e o desenvolvimento da ciência*. 2012 Disponível em: <https://truesingularity.wordpress.com/2012/09/19/a-braquistocrona-e-o-desenvolvimento-da-ciencia/>. Acesso em 16 de abr. 2019.

NASCIMENTO, João Bastista et al. *Cicloide e braquistócrona: Um exemplo elementar de unificação*, 2015.

SOUSA JÚNIOR, José Ribamar Alves de. *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*. 2010 (Dissertação de mestrado em Matemática Profissional). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2010. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94359/sousajunior\\_jra\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94359/sousajunior_jra_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em 16 de abr. 2019.

VEGA, José Oscar. SASSINE, André. *A magia da curva cicloide: braquistócrona e tautócrona*. São Paulo: Scortecci, 2011.